Лекция 6. ОБРАБОТКА МАТРИЦ В C++

В C++ определены и двумерные массивы (матрицы), например матрица A, состоящая из 4 строк и 5 столбцов..

$$A=\begin{pmatrix} 6 & -9 & 7 & 13 & 19 \\ 5 & 8 & 3 & 8 & 22 \\ 3 & 7 & 88 & 33 & 71 \\ 55 & 77 & 88 & 37 & 61 \end{pmatrix}$$

Двумерный массив (матрицу) можно объявить так:

тип имя_переменной [n][m];

где **n** – количество строк в матрице(строки нумеруются от **0** до **n-1**),

m – количество столбцов (столбцы нумеруются от **0** до **m-1**).

Например,

```
int x[10][15];
```

Описана матрица x, состоящая из 10 строк и 15 столбцов (строки нумеруются от 0 до 9, столбцы от 0 до 14).

Для обращения к элементу матрицы необходимо указать ее имя, и в квадратных скобках номер строки, а затем в квадратных скобках – номер столбца. Например, x[2][4] – элемент матрицы x, находящийся в третьей строке и пятом столбце.

В C++ можно описать многомерные массивы, которые можно объявить с помощью оператора следующей структуры:

тип имя_переменной [n1][n2]…[nk];

6.1. Блок-схемы основных алгоритмов обработки матриц

Блок-схема ввода матрицы представлена на рис. 6.1

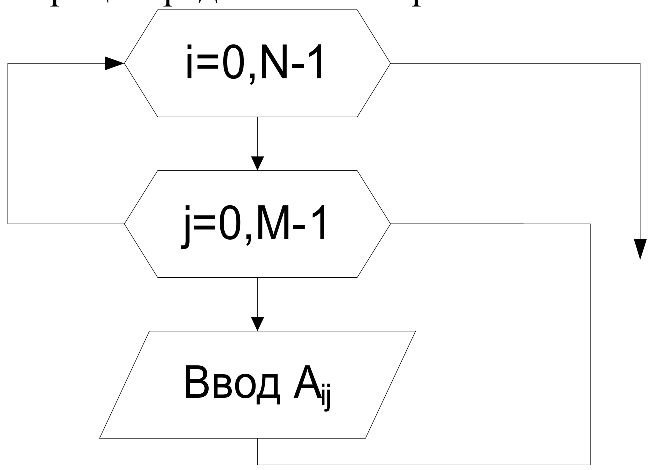


Рис 6.1. Ввод матрицы

С использованием функций printf и scanf ввод матрицы можно реализовать следующим образом.

```
printf("N=");  scanf("%d",&N);
printf("M=");  scanf("%d",&M);
printf("\n Vvedite A \n");
for(i=0;i<N;i++)
```

```
   for(j=0;j<M;j++)
   {
         scanf("%f",&b);
         a[i][j]=b;
   }
```

С использованием cin и cout ввод матрицы можно реализовать следующим образом.

```
cout<<"N="; cin>>N;
cout<<"M="; cin>>M;
cout<<"\n Vvedite A \n";
for(i=0;i<N;i++)
   for(j=0;j<M;j++)
       cin>>a[i][j];
```

Блок-схема вывода матрицы представлена на рис. 6.2

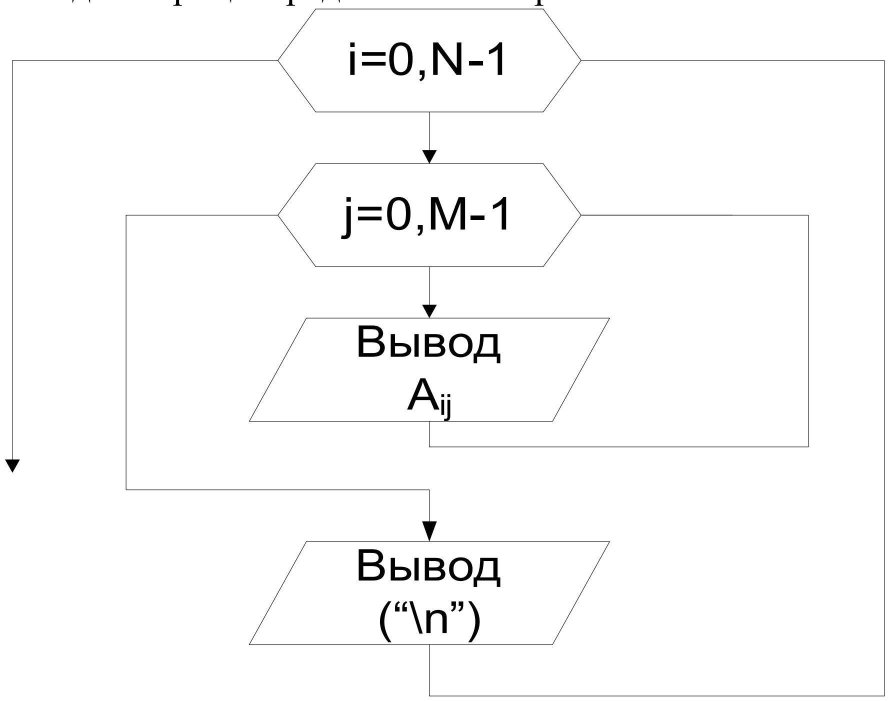


Рис 6.2. Вывод матрицы

С использованием функций printf и scanf построчный вывод матрицы можно реализовать следующим образом.

```
printf("\n Matrica A\n");
for(i=0;i<N;i++)
{for(j=0;j<M;j++)
   printf("%f\t",a[i][j]);
printf("\n");}
```

С использованием cin и cout построчный вывод матрицы можно реализовать следующим образом.

```
cout<<"\n Matrica A\n";
for(i=0;i<N;cout<<endl,i++)
for(j=0;j<M;j++)
   cout<<"\t"<<a[i][j]);
```

На рис. 6.3 представлена программа ввода-вывода матрицы т результаты ее работы.

main.cc

```cpp

#include <iostream>
using namespace std;
int main()
{
        int i,j,N,M,a[20][20];
    cout<<"N=";
    cin>>N;
    cout<<"M=";
    cin>>M;
    cout<<"Input Matrix A"<<endl;
    for(i=0;i<N;i++)
        for(j=0;j<M;j++)
            cin>>a[i][j];
    cout<<"Matrix A"<<endl;
    for(i=0;i<N;i++)
    {
        for(j=0;j<M;j++)
            cout<<a[i][j]<<"\t";
        cout<<endl;
    }
    return 0;
}
```

Документы   Задачи

Терминал

```
N=4
M=5
Input Matrix A
1 2 3 4 5
6 7 8 9 0
-11 -12 -13 -14 -15
7 5 4 3 32
Matrix A
1       2       3       4       5
6       7       8       9       0
-11     -12     -13     -14     -15
7       5       4       3       32
```

Рис 6.3. Результаты работы программы ввода матрицы и ее вывода

Вначале в качестве максимального элемента запоминается первый элемент матрицы A[0][0], номер строки imax=0, jmax=0. Затем организуется цикл прохода по матрице, где каждый элемент сравнивается со значением max, и если оказывается больше, то его значение запоминается как новое значение max, и также запоминаются его индексы. Блок-схема алгоритма представлена на рис. 6.4.

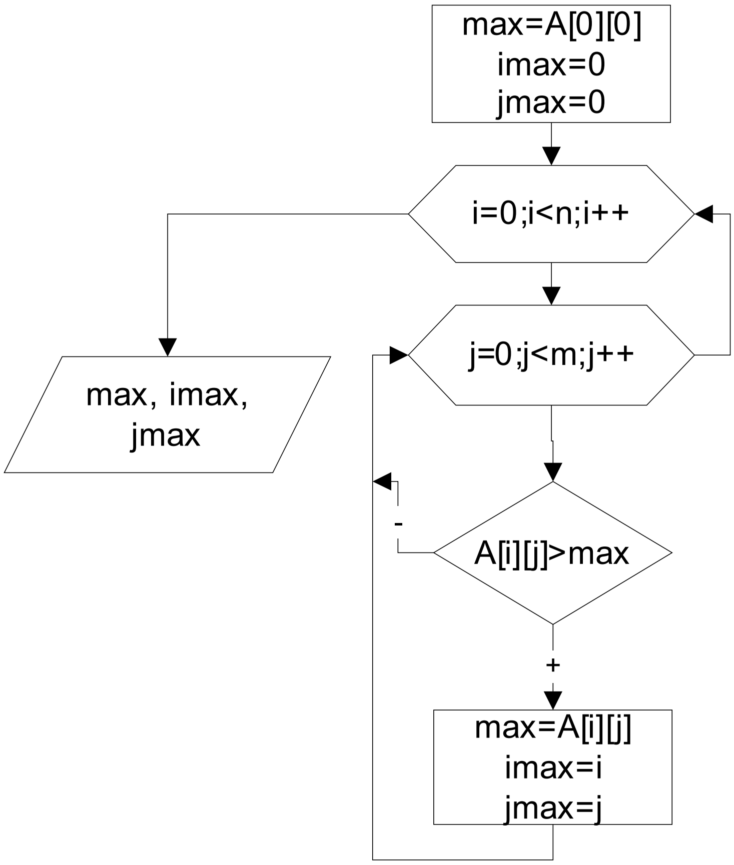


Рис 6.4. Поиск максимального элемента матрицы и его индексов

Программа поиска максимального элемента и его номера представлена ниже.

```
float a[20][20];
int i,j,n,m, imax, jmax;
float max;
// ввод матрицы
...
max=a[0][0];
imax=0; jmax=0;
for(i=0;i<n;i++)
   for(j=0;j<m;j++)
        if (a[i][j]<max)
        {
             max=a[i][j];
             imax=i;
             jmax=j;
        }
printf("\nmax=%f\n",max);
printf("\nimax=%d\n",imax);
printf("\njmax=%d\n",jmax);
```

Перед рассмотрением других алгоритмов, давайте вспомним некоторые свойства матриц (см. рис. 6.5):

- если номер строки элемента совпадает с номером столбца ($i = j$), это означает что элемент лежит на главной диагонали матрицы;
- если номер строки превышает номер столбца ($i > j$), то элемент находится ниже главной диагонали;
- если номер столбца больше номера строки ($i < j$), то элемент находится выше главной диагонали.
- элемент лежит на побочной диагонали *квадратной матрицы* , если его индексы удовлетворяют равенству $i + j +1 =$ n;
- неравенство $i + j + 1 <$ n характерно для элемента находящегося выше побочной диагонали *квадратной матрицы*;
- соответственно, элементу *квадратной матрицы*, лежащему ниже побочной диагонали соответствует выражение $i + j + 1 >$ n.

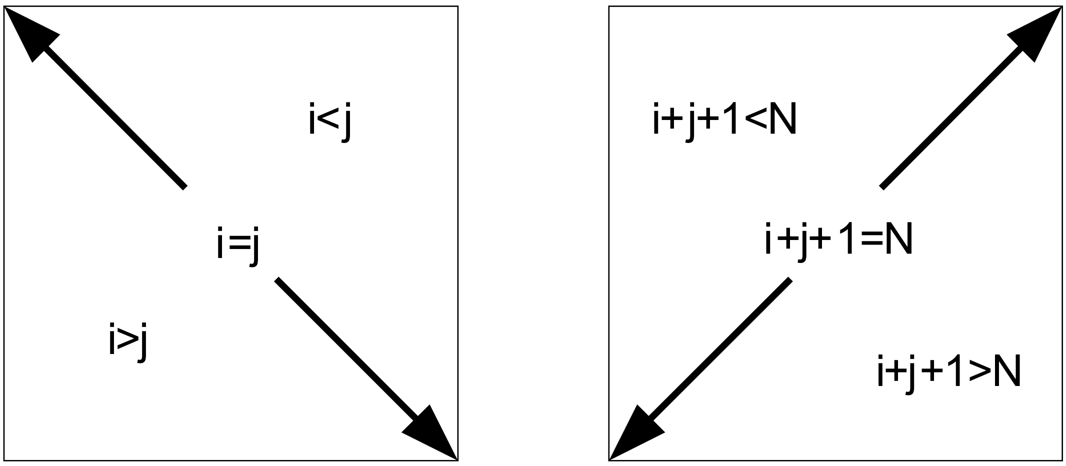


Рис 6.5. Соотношение индексов у квадратной матрицы

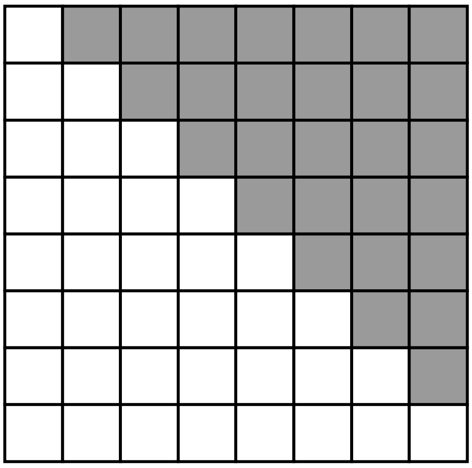
Вспомним из курса высшей математики некоторые типы квадратных матриц:

- матрица называется ***единичной***, если все элементы нули, а на главной диагонали единицы;
- матрица называется ***диагональной***, если все элементы нули, кроме главной диагонали;
- матрица ***нулевая***, если все элементы нули;
- матрица называется ***верхнетреугольной***, если все элементы ниже главной диагонали нули;
- матрица называется ***нижнетреугольной***, если все элементы выше главной диагонали нули;
- матрица называется ***симметричной***, если $A = A^T$.

Для проверки, что матрица В является обратной матрице А, нужно проверить условие А· В=Е (Е – единичная матрица).

Дальнейшие алгоритмы работы с матрицами рассмотрим на примерах решения задач.

ЗАДАЧА 6.1. Найти сумму элементов матрицы, лежащих выше главной диагонали.



Блок-схема решения задачи представлена на рис. 6.6.

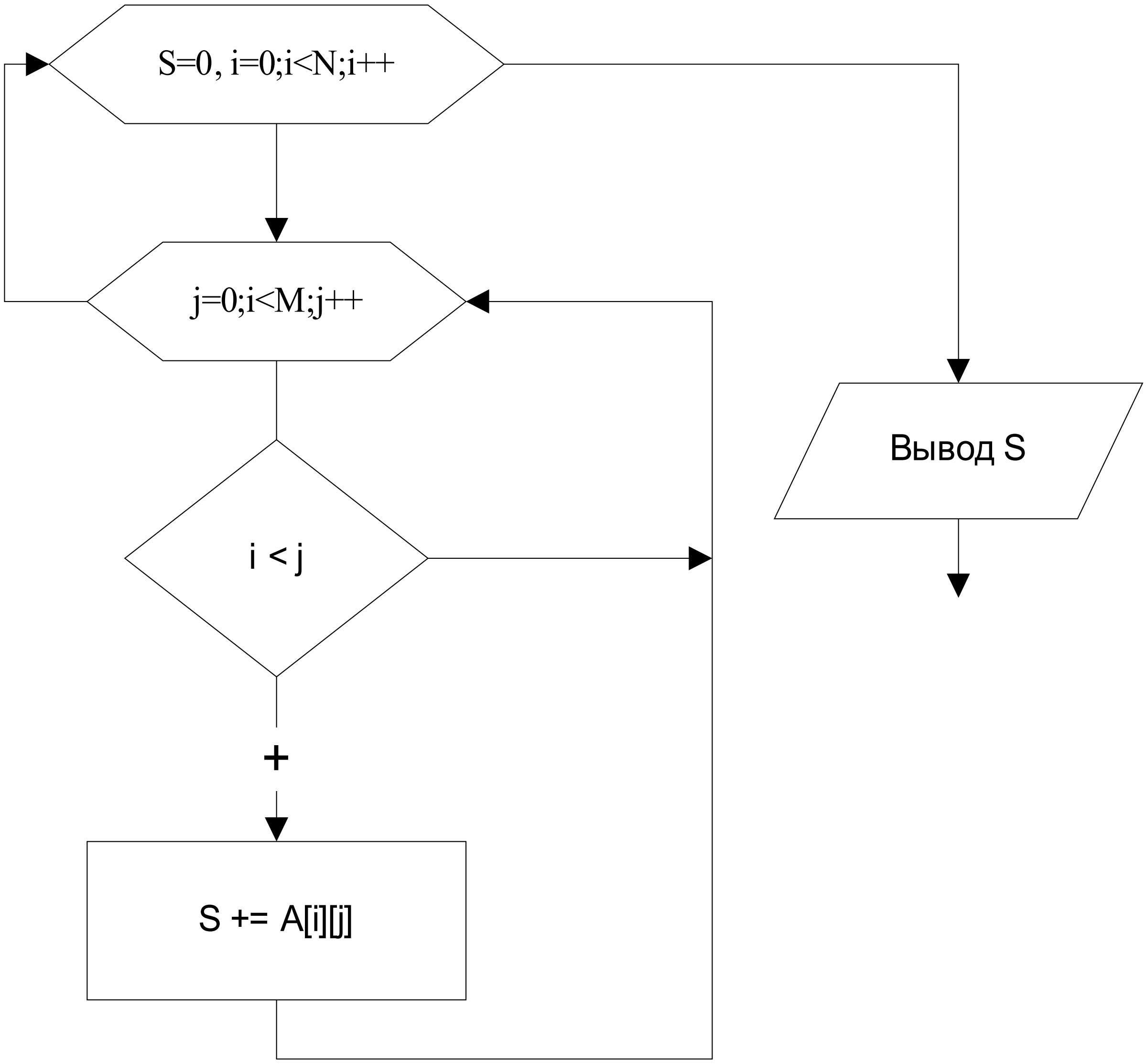


Рис.6.6. Блок-схема задачи 6.1.

```
 int main()
{int S,i,j,N,M,a[20][20];
   cout<<"N=";cin>>N;
   cout<<"M=";cin>>M;
   cout<<"Input Matrix A"<<endl;
```

```
for(i=0;i<N;i++)
    for(j=0;j<M;j++)
        cin>>a[i][j];
for(S=i=0;i<N;i++)
    for(j=0;j<M;j++)
        if (j>i) S+=a[i][j];
cout<<"S="<<S<<endl;}
```

На рис.6.7 приведен второй алгоритм решения задачи.

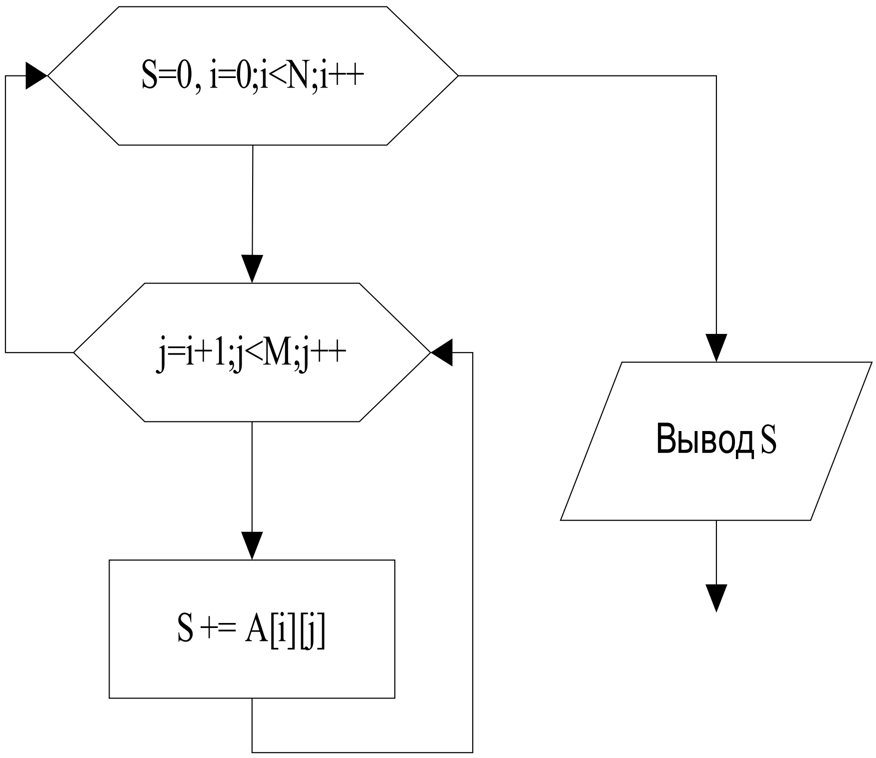
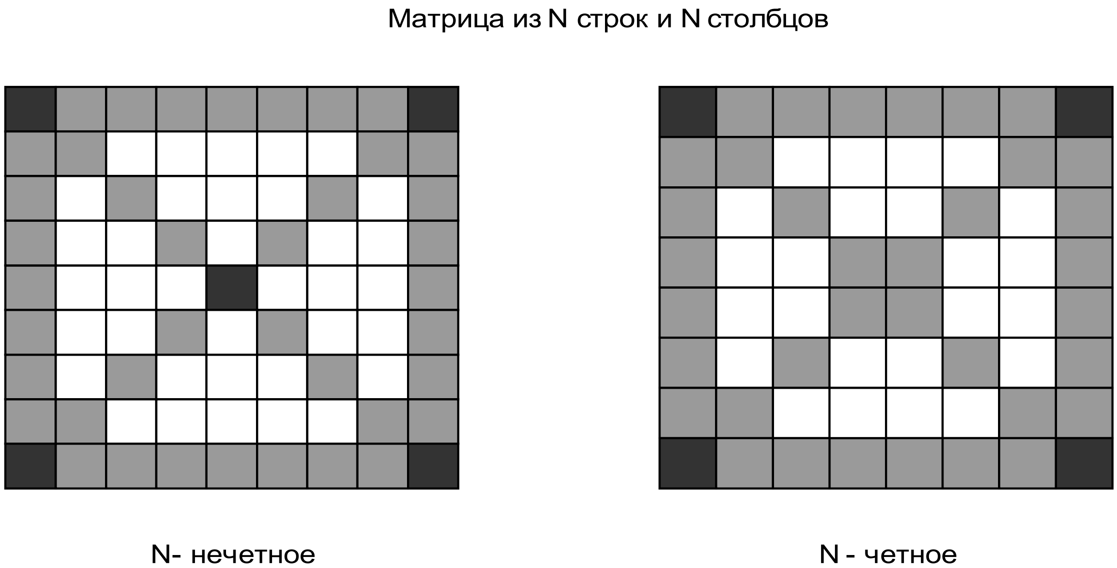


Рис 6.7. Второй вариант решения задачи 7.1

ЗАДАЧА 6.2. Вычислить количество положительных элементов квадратной матрицы, расположенных по ее периметру и на диагоналях. Блок-схема решения приведена на рис.6.7.



Из соотношения индексов на побочной диагонали $i + j + 1 = n$ находим $j = n - i - 1$

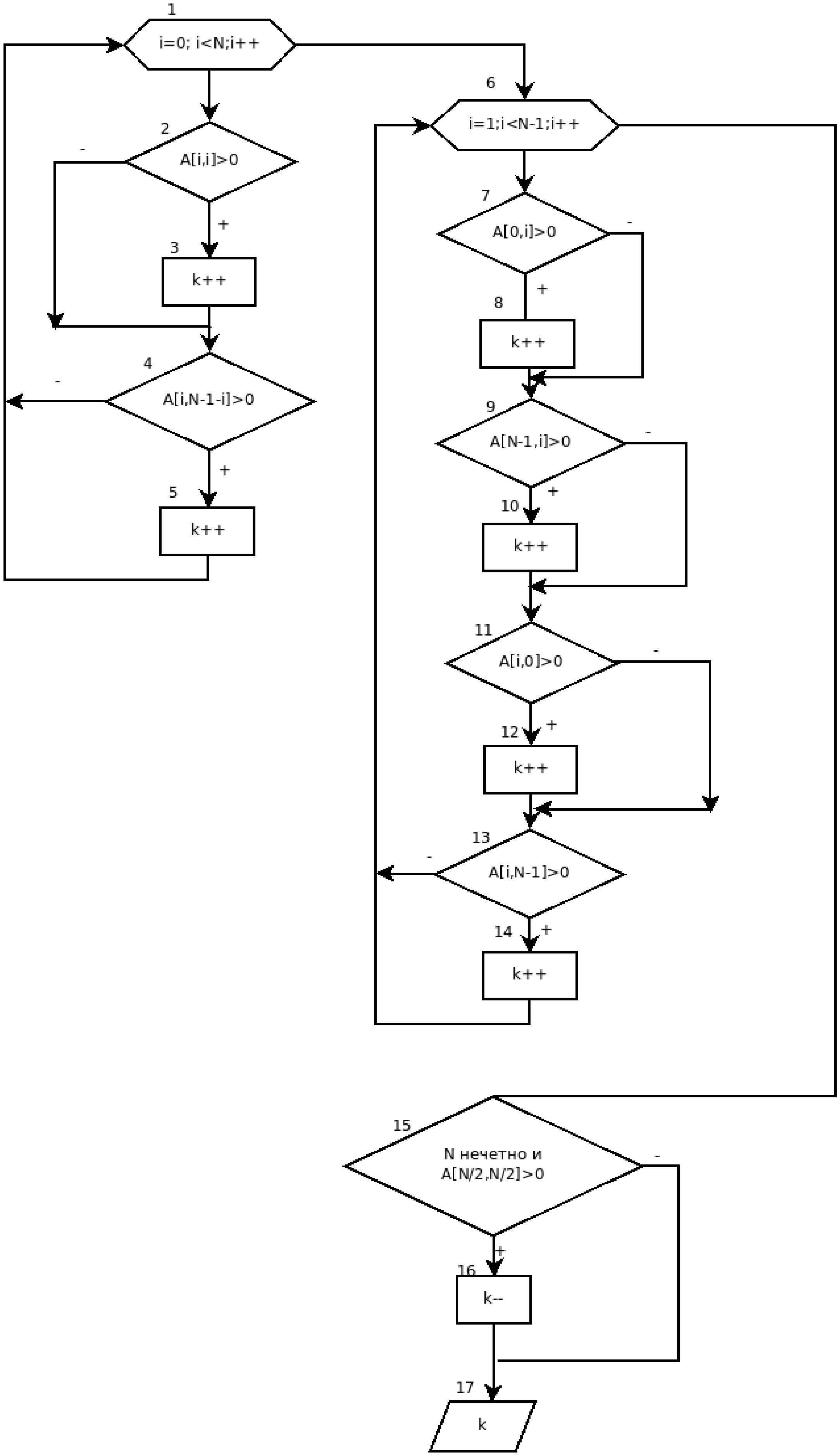


Рис 6.7. Блок-схема к примеру 6.2

```
#include <iostream>
using namespace std;
int main()
{int k,i,j,N,a[20][20];
cout<<"N=";cin>>N;
cout<<"Input Matrix A"<<endl;
for(i=0;i<N;i++)
for(j=0;j<N;j++)
cin>>a[i][j];
//цикл прохода по главной и побочной диагоналям
for(i=k=0;i<N;i++)
{  if(a[i][i]>0)k++;    if(a[i][N-i-1]>0)k++;}
//цикл прохода по первой и последней строках матрицы,
//по первому и последнему столбцам,
//за исключением крайних элементов
for(i=1;i<N-1;i++)
{  if(a[0][i]>0)k++;    if(a[N-1][i]>0)k++;
   if(a[i][0]>0)k++;    if(a[i][N-1]>0)k++;}
//проверка, пересекаются ли диагонали, когда размерность
//матрицы - нечетное число
if ((N%2!=0)&&(a[N/2][N/2]>0))k--;
cout<<"k="<<k<<endl;}
```

ЗАДАЧА 6.3. Проверить, является ли заданная квадратная матрица единичной. Единичной называют матрицу, у которой элементы главной диагонали – единицы, а все остальные – нули.

```
#include <iostream>
using namespace std;
int main()
{int pr,i,j,N,a[20][20];
cout<<"N=";cin>>N;cout<<"Input Matrix A"<<endl;
for(i=0;i<N;i++)
for(j=0;j<N;j++)
cin>>a[i][j];
//Предполаем, что матрица — единичная, pr=1.
for(pr=1,i=0;i<N;i++)
for(j=0;j<N;j++)
//Если элемент лежит на главной диагонали и это не 1,
//или элемент вне главной диагонали и это не 0, то
// матрица не единичная, pr=0.
if (((i==j) && (a[i][j]!=1)) || ((i!=j) && (a[i][j]!=0)))
  {       pr=0; break;     }
if (pr) cout<<"Единичная матрица\n";
  else cout<<"Матрица не является единичной\n";}
```

ЗАДАЧА 6.4. Поменять местами элементы главной и побочной диагонали матрицы $A(k,k)$. Алгоритм сводится к обмену элементов на главной и побочной диагоналях в каждой строке, его блок-схема приведена на рис.6.8.

```
#include <iostream>
using namespace std;
int main()
{
int i,j,k;
double b,a[20][20];
cout<<"k=";
cin>>k;
cout<<"Input Matrix A"<<endl;
for(i=0;i<k;i++)
    for(j=0;j<k;j++)
        cin>>a[i][j];
for(i=0;i<k;i++)
{
    b=a[i][i];
    a[i][i]=a[i][k-1-i];
    a[i][k-1-i]=b;}
cout<<"Output Matrix A"<<endl;
for(i=0;i<k;cout<<endl,i++)
    for(j=0;j<k;j++)
        cout<<a[i][j]<<"\t";
}
```

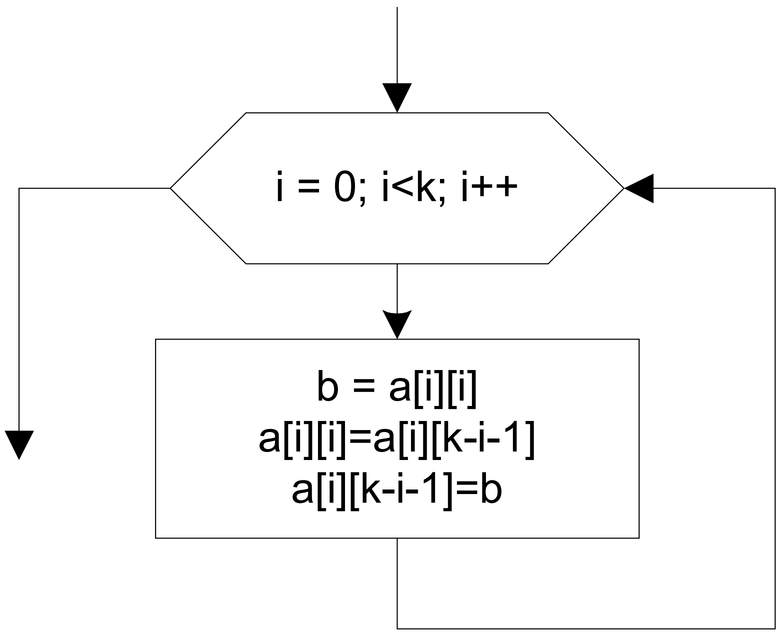


Рис 6.8. Блок-схема к примеру 6.4

ЗАДАЧА 6.5. Преобразовать исходную матрицу $A(N,M)$ так, чтобы нулевой элемент каждой строки был заменен средним арифметическим элементов этой строки. Необходимо в каждой строке матрицы найти сумму элементов, разделить на количество элементов в строке и полученный результат записать в первый элемент строки. Блок-схема изображена на рис.6.9.

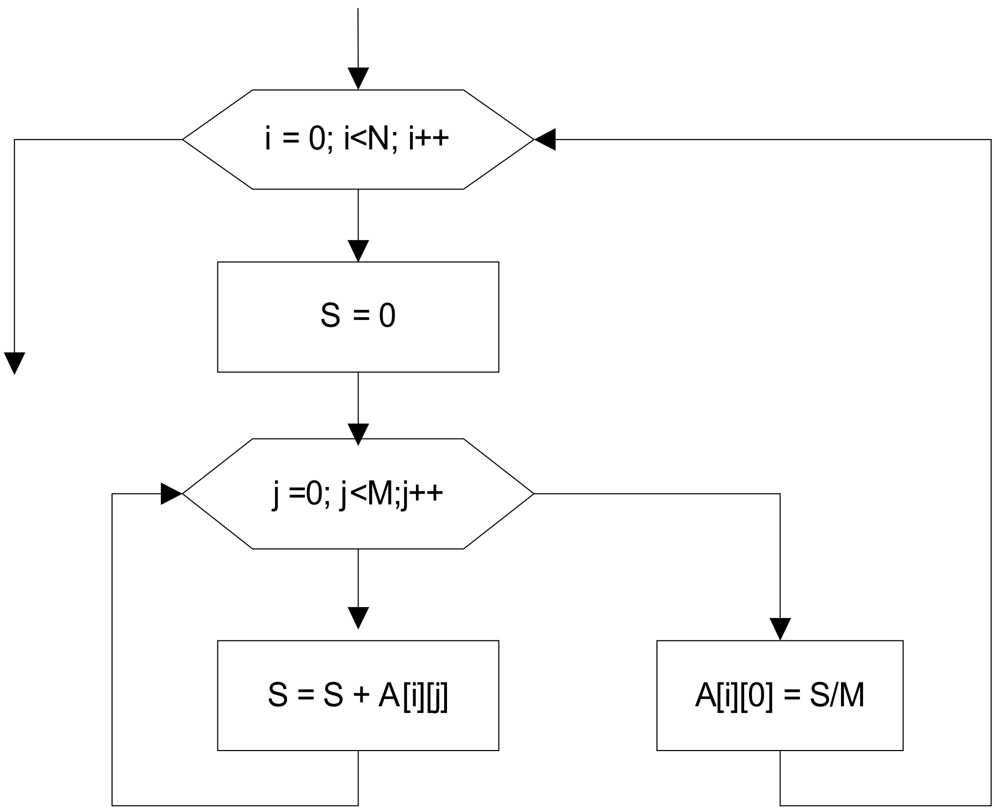


Рис 6.9. Блок-схема к примеру 6.5

```
#include <iostream>
using namespace std;
int main()
{int i,j,N,M;
double S,a[20][20];
cout<<"N=";    cin>>N;
cout<<"M=";    cin>>M;
cout<<"Input Matrix A"<<endl;
for(i=0;i<N;i++)
   for(j=0;j<M;j++)
       cin>>a[i][j];
for(i=0;i<N;a[i][0]=S/M,i++)
   for(S=j=0;j<M;j++)       S+=a[i][j];
cout<<"Output Matrix A"<<endl;
for(i=0;i<N;cout<<endl,i++)
for(j=0;j<M;j++)
cout<<a[i][j]<<"\t";}
```

ЗАДАЧА 6.6. Преобразовать матрицу $A(m,n)$ так, чтобы строки с нечетными индексами были упорядочены по убыванию, с четными – по возрастанию. Перебираем все строки, если номер строки четный, то то упорядочиваем эту строку по возрастанию методом пузырька, иначе - по убыванию методом пузырька. Блок-схема решения задачи приведена на рис.6.10.

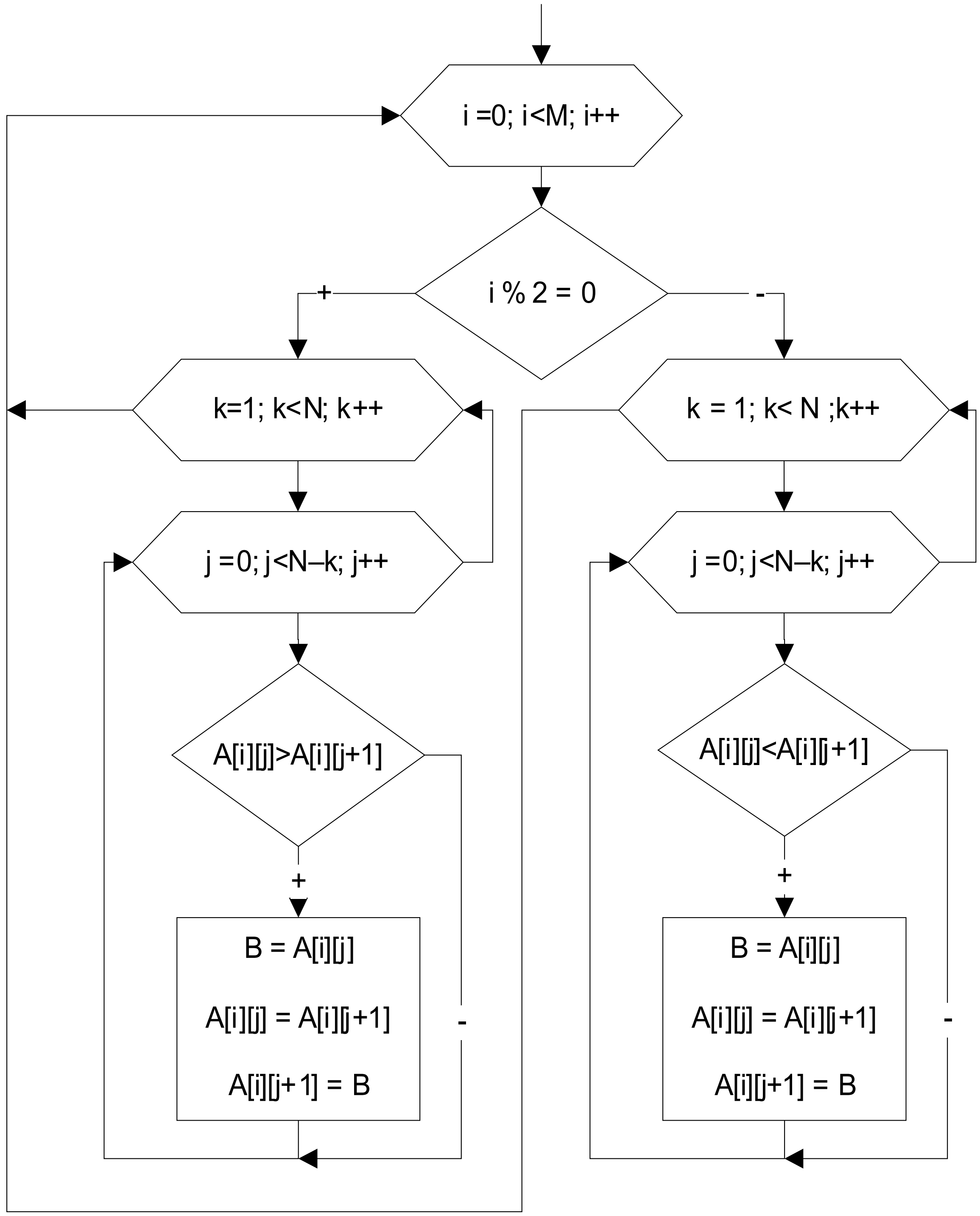


Рис 6.10. Блок-схема к примеру 6.6

```
#include <iostream>
using namespace std;
int main()
{int i,j,k,N,M;
double b,a[20][20];
cout<<"M=";cin>>M;
cout<<"N=";cin>>N;
```

```
cout<<"Input Matrix A"<<endl;
for(i=0;i<M;i++)
for(j=0;j<N;j++)
cin>>a[i][j];
for(i=0;i<M;i++)
//Проверка номера строки на четность
if(i%2==0)
{//Упорядочение четной строки по возрастанию
   for(k=1;k<N;k++)
        for(j=0;j<N-k;j++)
             if(a[i][j]>a[i][j+1])
             {
                  b=a[i][j];
                  a[i][j]=a[i][j+1];
                  a[i][j+1]=b;
             }
}
else//Упорядочение нечетной строки по убыванию
for(k=1;k<N;k++)
        for(j=0;j<N-k;j++)
             if(a[i][j]<a[i][j+1])
             {
                  b=a[i][j];
                  a[i][j]=a[i][j+1];
                  a[i][j+1]=b;
             }
cout<<"Output Matrix A"<<endl;
for(i=0;i<M;cout<<endl,i++)
for(j=0;j<N;j++)
cout<<a[i][j]<<"\t";
}
```

6.2.ДИНАМИЧЕСКИЕ МАТРИЦЫ

1-й способ работы с динамическими матрицами основан на работе с одинарным указателем. При работе с динамическими матрицами следует помнить, что выделенный участок памяти под матрицу `A(N,M)` представляет собой участок памяти размером `NxM` элементов. Поэтому выделение памяти будет выглядеть следующим образом:

```
A=(тип *) calloc(n*m, sizeof(тип))
```

или

```
A=(тип *) malloc(n*m*sizeof(тип))
```

Для обращения к элементу $A_{i,j}$ необходимо, но номеру строки i и номеру столбца j вычислить номер этого элемента k в одномерном динамическом массиве. Учитывая, что в массиве элементы нумеруются с нуля $k=i \cdot M+j$.

Статический элемент матрицы **a[i][j]** записывается как ***(a+i*m+j)**

2-й способ работы с динамическими матрицами **о**снован на использовании двойного указателя – указателя на указатель.

```
float **a;
```

Это указатель на `float *`, или указатель на массив.

Выделение и очистка памяти в этом случае осуществляется следующим образом:

```
void main()
{
int n,m;
float **a;
//Создали массив указателей в количестве n штук на float,
// каждый //элемент массива, является адресом, в котором
// хранится указатель на float.
a=new float *[n];
//Осталось определить значение этого указателя. Для этого
//организуем цикл от 0 до n-1, в котором каждый указатель
//будет адресовать участок памяти, в котором хранится m
// элементов.
for(i=0;i<n;i++)
a[i]=new float(m);
//Обращение к элементу матрицы в этом случае будет идти
// стандартным образом a[i]][j]
//По окончании работы необходимо освободить память
for(i=0;i<n;i++)
delete a[i];
delete [];
}
```

ЗАДАЧА 6.7. Задана матрица $A(N,M)$. Поменять местами ее максимальный и минимальный элементы. Блок-схема расчетной части задачи изображена на рис.6.11.

```
#include <iostream>
using namespace std;
//Решение задачи с использованием одномерного
// динамического массива
int main()
{int i,j,imax,jmax,imin,jmin,N,M;
double min,max,b,*a;
cout<<"N=";cin>>N;
cout<<"M=";cin>>M;
```

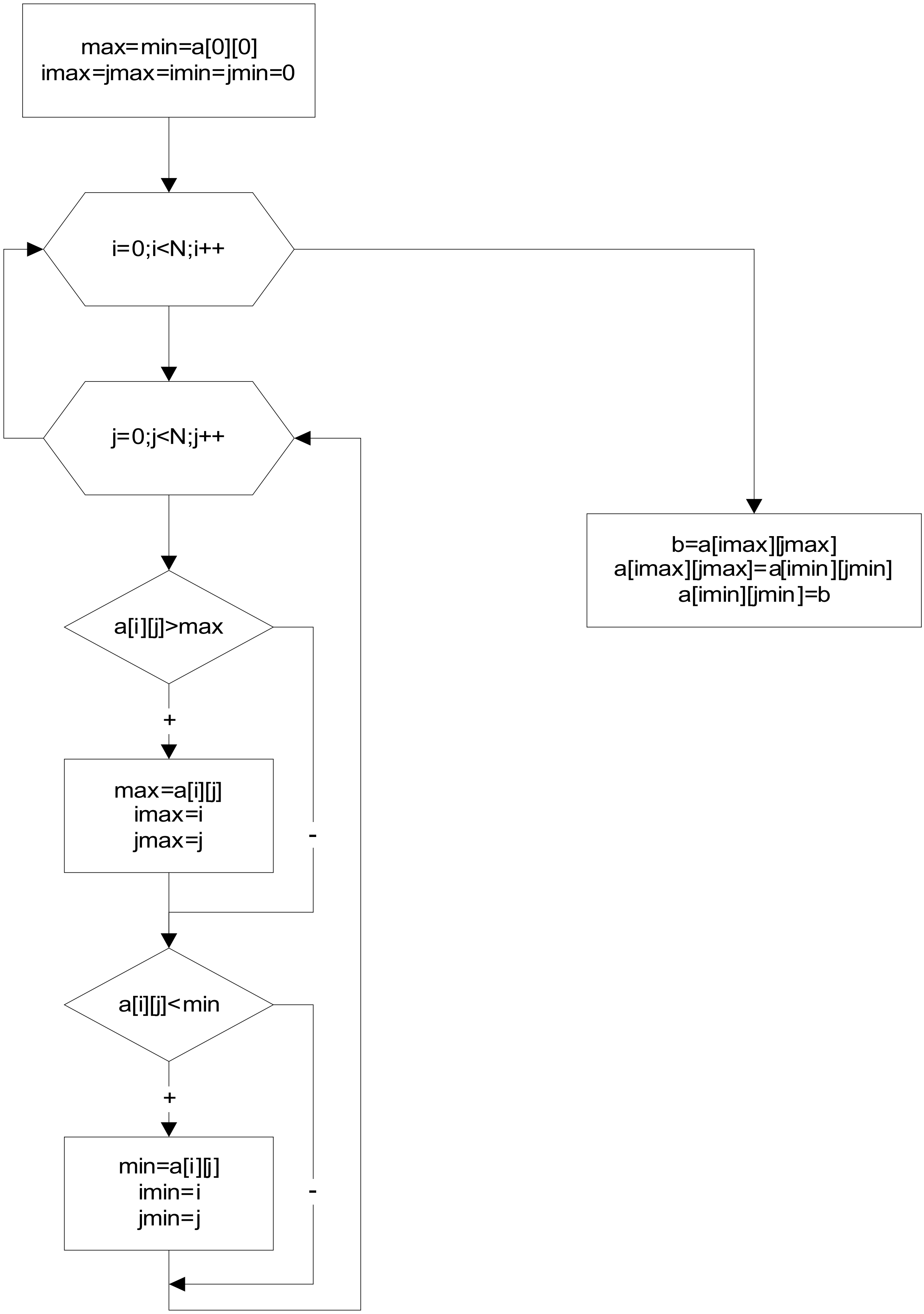


Рис 6.11. Блок-схема к задаче 6.7

```
 A=(double *) calloc(n*m, sizeof(double));
cout<<"Input Matrix A"<<endl;
for(i=0;i<N;i++)
```

```
for(j=0;j<M;j++)
     cin>>*(a+i*M+j);
for(max=min=*a,imax=jmax=imin=jmin=i=0;i<N;i++)
for(j=0;j<M;j++)
{  if ((*(a+i*M+j))>max)
       {max=*(a+i*M+j); imax=i;jmax=j;}
   if ((*(a+i*M+j))<min)
       {min=*(a+i*M+j); imin=i;jmin=j;}}
b=*(a+imax*M+jmax);*(a+imax*M+jmax)=*(a+imin*M+jmin);
*(a+imin*M+jmin)=b;
cout<<"Output Matrix A"<<endl;
for(i=0;i<N;cout<<endl,i++)
   for(j=0;j<M;j++)
       cout<<*(a+i*M+j)<<"\t";}
```

ЗАДАЧА 6.8. Задана матрица $A(n,m)$. Сформировать вектор $P(m)$, в который записать номера строк максимальных элементов каждого столбца.

Алгоритм решения этой задачи следующий (рис. 6.12): для каждого столбца матрицы находим максимальный элемент и его номер, номер максимального элемента j-–го столбца матрицы записываем в j-–й элемент массива P.

```
#include <iostream>
using namespace std;
//Решение задачи с использованием двойного указателя.
int main()
{float max;float **a;int *p;int i,j,n,m,nmax;
cout<<"n=";      cin>>n;
cout<<"m=";      cin>>m;
a=new float *[n];
for(i=0;i<n;i++)
    a[i]=new float(m);
p=new int[m];
cout<<"Vvod matrici"<<endl;
for(i=0;i<n;i++)
    for(j=0;j<m;j++)
        cin>>a[i][j];
cout<<"Matrica"<<endl;
for(i=0;i<n;i++)
{   for(j=0;j<m;j++)
        cout<<a[i][j]<<"\t";
    cout<<endl;}
cout<<"Massiv P"<<endl;
for(j=0;j<m;j++)
{//поиск максимального элемента в j-м столбце и его
//номера i
    max=a[0][j];
```

```
    nmax=0;
    for(i=1;i<n;i++)
    if (a[i][j]>max)
        {
        max=a[i][j];
        nmax=i;
        }
//записываем найденный nmax в i-й элемент массива p
    p[j]=nmax;
    cout<<p[j]<<"\t";
}
cout<<endl;
delete [] a;
return 0;
}
```

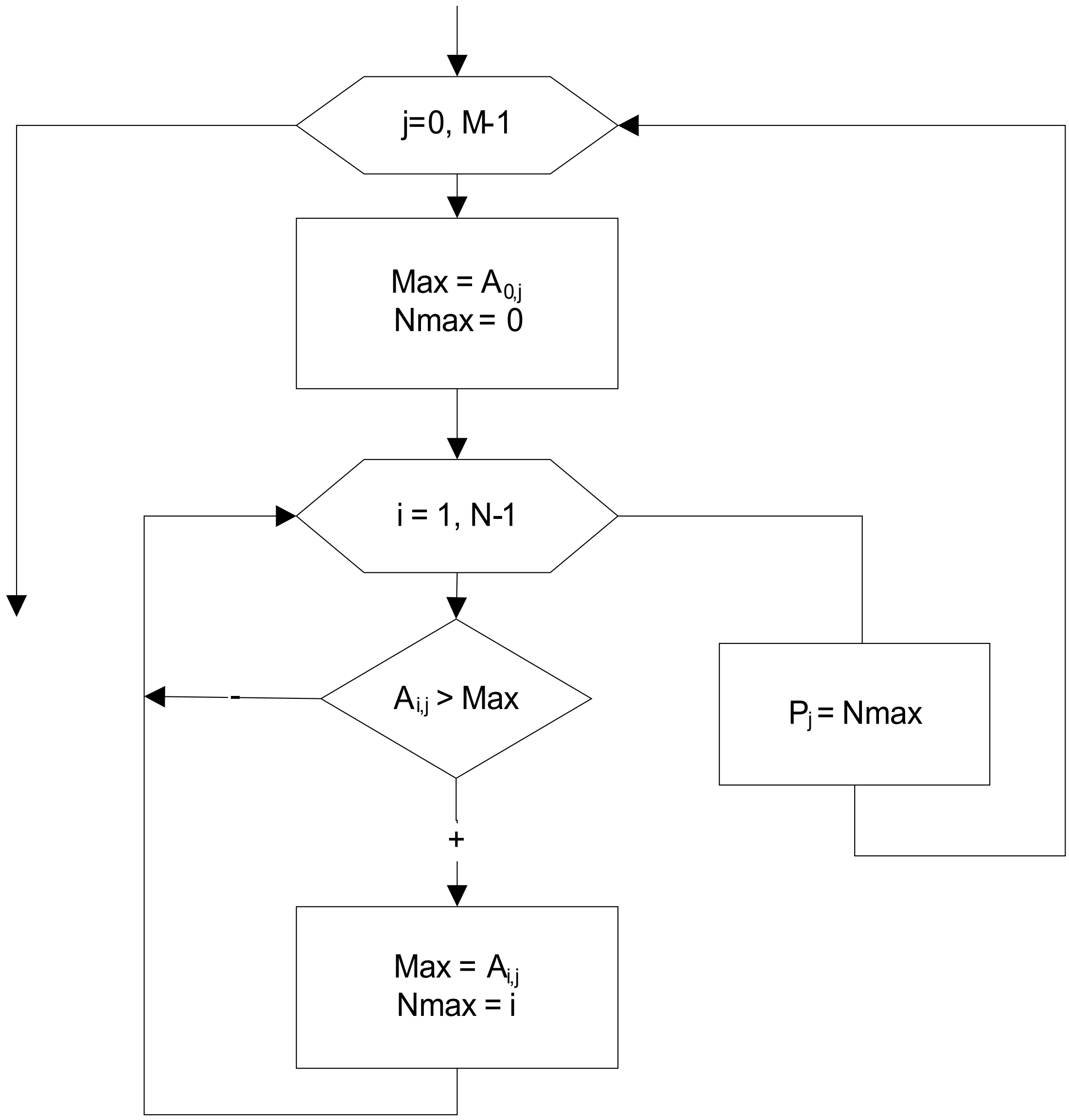


Рис 6.12. Блок-схема к примеру 6.8

ЗАДАЧА 6.9. Написать программу умножения двух матриц вещественных чисел *A(N,M)* и *B(M,L)*.

$$\begin{pmatrix} a_{00} & a_{01} & a_{02} \\ a_{10} & a_{11} & a_{12} \\ a_{20} & a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} b_{00} & b_{01} \\ b_{10} & b_{10} \\ b_{20} & b_{21} \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} a_{00}b_{00}+a_{01}b_{10}+a_{02}b_{20} & a_{00}b_{01}+a_{01}b_{11}+a_{02}b_{21} \\ a_{10}b_{00}+a_{11}b_{10}+a_{12}b_{20} & a_{10}b_{01}+a_{11}b_{11}+a_{12}b_{21} \\ a_{20}b_{00}+a_{21}b_{10}+a_{22}b_{20} & a_{20}b_{01}+a_{21}b_{11}+a_{22}b_{21} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} c_{00} & c_{01} \\ c_{10} & c_{10} \\ c_{20} & c_{21} \end{pmatrix}$$

В общем виде формула для нахождения элемента C_{ij} матрицы имеет вид:

$$C_{i,j}=\sum_{k=0}^{M-1} A_{ik}B_{kj}\ ,\ i=0,N\text{-}1\ j=0,L\text{-}1.$$

Нужно обратить внимание, что перемножать матрицы можно только в том случае, если количество строк левой матрицы совпадает с количеством столбцов правой. Кроме того $A\times B\neq B\times A$. Блок-схема перемножения двух матриц приведена на рис. 6.13

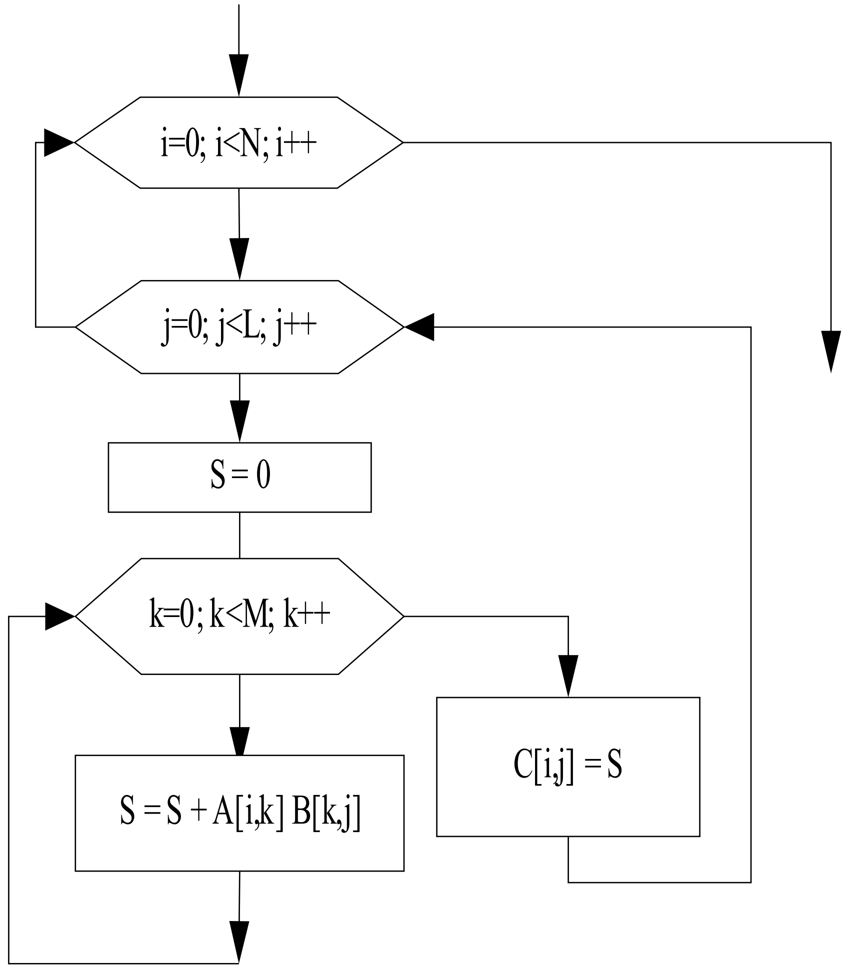


Рис 6.13. Блок-схема перемножения двух матриц

```
int main()
{int i,j,k,N,L,M;
double **a, **b, **c;
```

```
cout<<"N=";         cin>>N;
cout<<"M=";         cin>>M;
cout<<"L=";         cin>>L;
a=new double *[N];
for(i=0;i<N;i++)
   a[i]=new double[M];
b=new double *[M];
for(i=0;i<M;i++)
   b[i]=new double[L];
c=new double *[N];
for(i=0;i<N;i++)
   c[i]=new double[L];
cout<<"Input Matrix A"<<endl;
for(i=0;i<N;i++)
   for(j=0;j<M;j++)
        cin>>a[i][j];
cout<<"Input Matrix B"<<endl;
for(i=0;i<M;i++)
   for(j=0;j<L;j++)
        cin>>b[i][j];
for(i=0;i<N;i++)
   for(j=0;j<L;j++)
        for(c[i][j]=0,k=0;k<M;k++)
             c[i][j]+=a[i][k]*b[k][j];
cout<<"Matrix C"<<endl;
for(i=0;i<N;cout<<endl,i++)
   for(j=0;j<L;j++)
        cout<<c[i][j]<<"\t";
for(i=0;i<N;i++)        delete [] a[i];
delete [] a;
for(i=0;i<M;i++)        delete [] b[i];
delete [] b;
for(i=0;i<N;i++)        delete [] c[i];
delete [] c;}
```

Лекция 7. Решение задач линейной алгебры с использованием динамических матриц и функций

Рассмотрим решение следующих задач линейной алгебры:

- решение систем линейных алгебраических уравнений;
- вычисление обратной матрицы;
- вычисление определителя.

7.1. Решение систем линейных алгебраических уравнений методом Гаусса

ЗАДАЧА 7.1. Решить систему линейных алгебраических уравнений (7.1).

$$\begin{gathered} a_{00}x_0+a_{01}x_1+...+a_{0n-1}x_{n-1}=b_0 \\ a_{10}x_0+a_{11}x_1+...+a_{1n-1}x_{n-1}=b_1 \\ ... \\ a_{n-10}x_0+a_{n-11}x_1+...+a_{n-1n-1}x_{n-1}=b_{n-1} \end{gathered} \qquad (7.1)$$

Через матрицу A обозначим матрицу коэффициентов системы, через вектор B – вектор свободных членов, X – вектор неизвестных:

$$A=\begin{pmatrix} a_{00} & a_{01} & ... & a_{0n-1} \\ a_{10} & a_{11} & ... & a_{1n-1} \\ & ... & & \\ a_{n-10} & a_{n-11} & ... & a_{n-1n-1} \end{pmatrix} \quad b=\begin{pmatrix} b_0 \\ b_1 \\ ... \\ b_{n-1} \end{pmatrix} \quad x=\begin{pmatrix} x_0 \\ x_1 \\ ... \\ x_{n-1} \end{pmatrix}$$

$$Ax = b.$$

Первый этап - *прямой ход метода Гаусса*, заключается в приведении расширенной матрицы (7.2) к *треугольному виду* (7.3). Это означает, что все элементы матрицы (7.2) ниже главной диагонали должны быть равны нулю.

$$A'=\begin{pmatrix} a_{00} & a_{01} & ... & a_{0n-1} & b_0 \\ a_{10} & a_{11} & ... & a_{1n-1} & b_1 \\ & ... & & & \\ a_{n-10} & a_{n-11} & ... & a_{n-1n-1} & b_{n-1} \end{pmatrix} \qquad (7.2)$$

$$A'=\begin{pmatrix} a_{00} & a_{01} & ... & a_{0n-1} & b_0 \\ 0 & a_{11} & ... & a_{1n-1} & b_1 \\ & ... & & & \\ 0 & 0 & ... & a_{n-1n-1} & b_{n-1} \end{pmatrix} \qquad (7.3)$$

Для формирования нулевого столбца матрицы (7.3) необходимо из каждой строки (начиная со первой) вычесть нулевую, умноженную на некоторое число *M*.

В общем виде можно записать так:

1-я строка = 1-я строка – $M\times$ 0-я строка

2-я строка = 2-я строка – $M\times$ 0-я строка

…

i-я строка = *i*-я строка – $M\times$ 0-я строка

…

n-1-я строка = *n-1*-я строка – $M\times$ 0-я строка

Преобразование элементов первой строки будет происходить по формулам:

$$a_{10}=a_{10}-Ma_{00} \qquad a_{11}=a_{11}-Ma_{01} \quad \ldots$$

$$a_{1i}=a_{1i}-Ma_{0i} \qquad a_{1n-1}=a_{1n-1}-Ma_{0n-1} \quad \ldots$$

$$b_1=b_1-Mb_0$$

$$a_{10}-Ma_{00}=0$$

$$M=\frac{a_{10}}{a_{00}}$$

Элементы второй строки и коэффициент *M* можно рассчитать аналогично:

$$a_{20}=a_{20}-Ma_{00} \qquad a_{21}=a_{21}-Ma_{01} \quad \ldots$$

$$a_{2i}=a_{2i}-Ma_{0i} \qquad a_{2n-1}=a_{2n-1}-Ma_{0n-1} \quad \ldots$$

$$b_2=b_2-Mb_0$$

$$a_{20}-Ma_{00}=0$$

$$M=\frac{a_{20}}{a_{00}}$$

Таким образом, преобразование элементов *i*–й строки будет происходить следующим образом:

$$a_{i0}=a_{i0}-Ma_{00} \qquad a_{i1}=a_{i1}-Ma_{01} \quad \ldots$$

$$a_{i\,n-1}=a_{i\,n-1}-Ma_{0\,n-1} \qquad b_i=b_i-Mb_0$$

$$a_{i0}-Ma_{i0}=0$$

Коэффициент *M* для *i*–й строки будет равен:

$$M=\frac{a_{ik}}{a_{kk}}$$

Далее необходимо повторить описанный выше алгоритм для следующих столбцов матрицы (7.2), причем начинать преобразовывать первый столбец со второго элемента, второй столбец – с третьего и т.д. В результате система уравнений примет вид (7.4). Алгоритм этого процесса изображен на рис. 7.1.

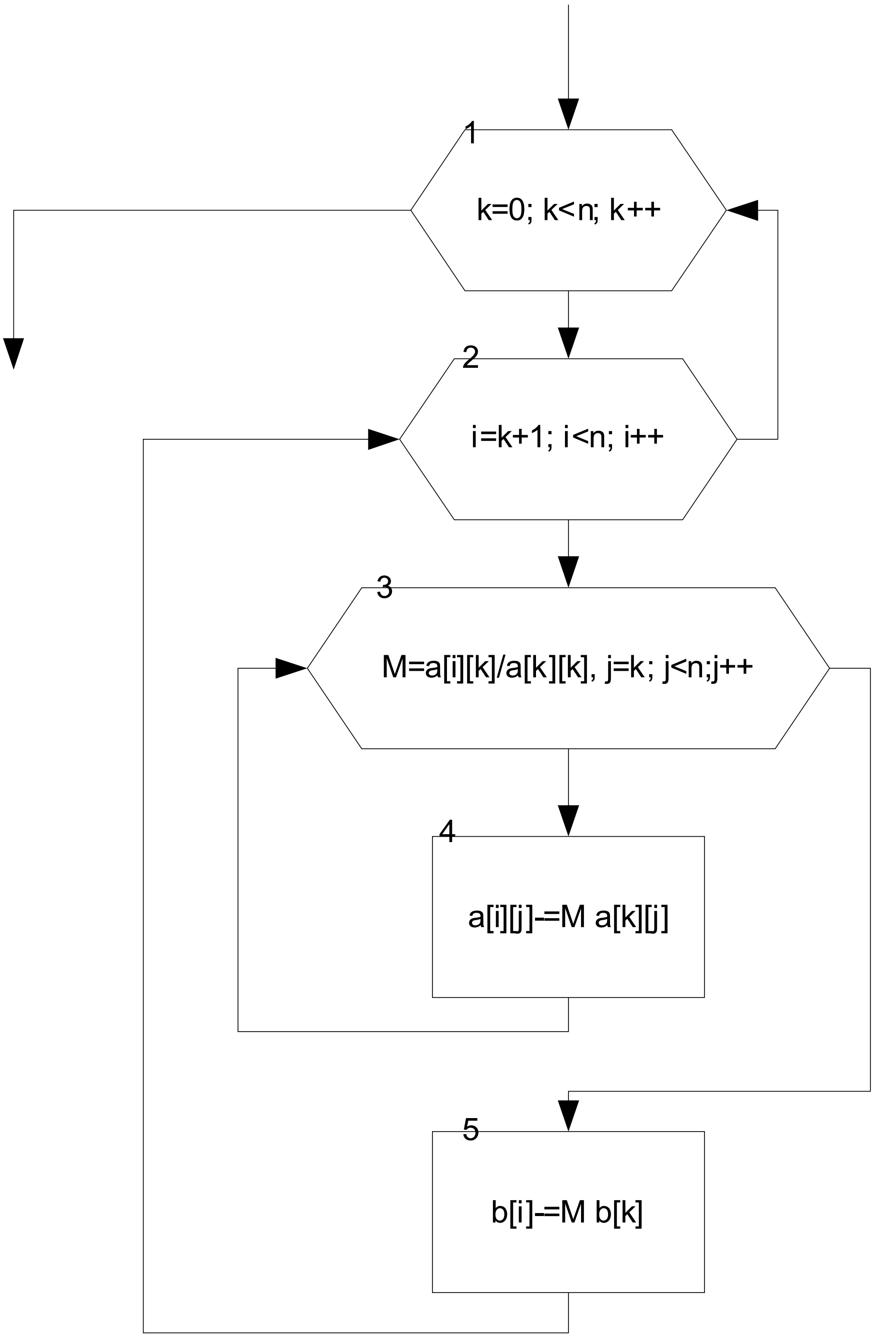


Рис 7.1. Блок-схема алгоритма преобразования расширенной матрицы к треугольному виду

$$
\begin{aligned}
a_{00}x_0+a_{01}x_1++a_{02}x_2\ldots+a_{0\mathrm{n}-1}x_{n-1}&=b_0\\
a_{11}x_1+a_{02}x_2+\ldots+a_{1\mathrm{n}-1}x_{n-1}&=b_1\\
a_{22}x_2+\ldots+a_{1\mathrm{n}-1}x_{n-1}&=b_1\\
\ldots\qquad&\\
a_{n-1\mathrm{n}-1}x_{n-1}&=b_{n-1}
\end{aligned}
\qquad (7.4)
$$

Если в матрице (7.2) на главной диагонали встретится элемент a_{kk}, равный нулю, то расчет коэффициента *М* для *к*-й строки будет невозможен. Избежать деления на ноль можно, избавившись от нулевых элементов на главной диагонали. Для этого перед обнулением элементов в *k*–м столбце необходимо найти в нем максимальный по модулю элемент (среди расположенных ниже a_{kk}), запомнить номер строки, в которой он находится, и поменять ее местами с *k*-й строкой. Алгоритм, отображающий эти преобразования, приведен на рис. 7.2.

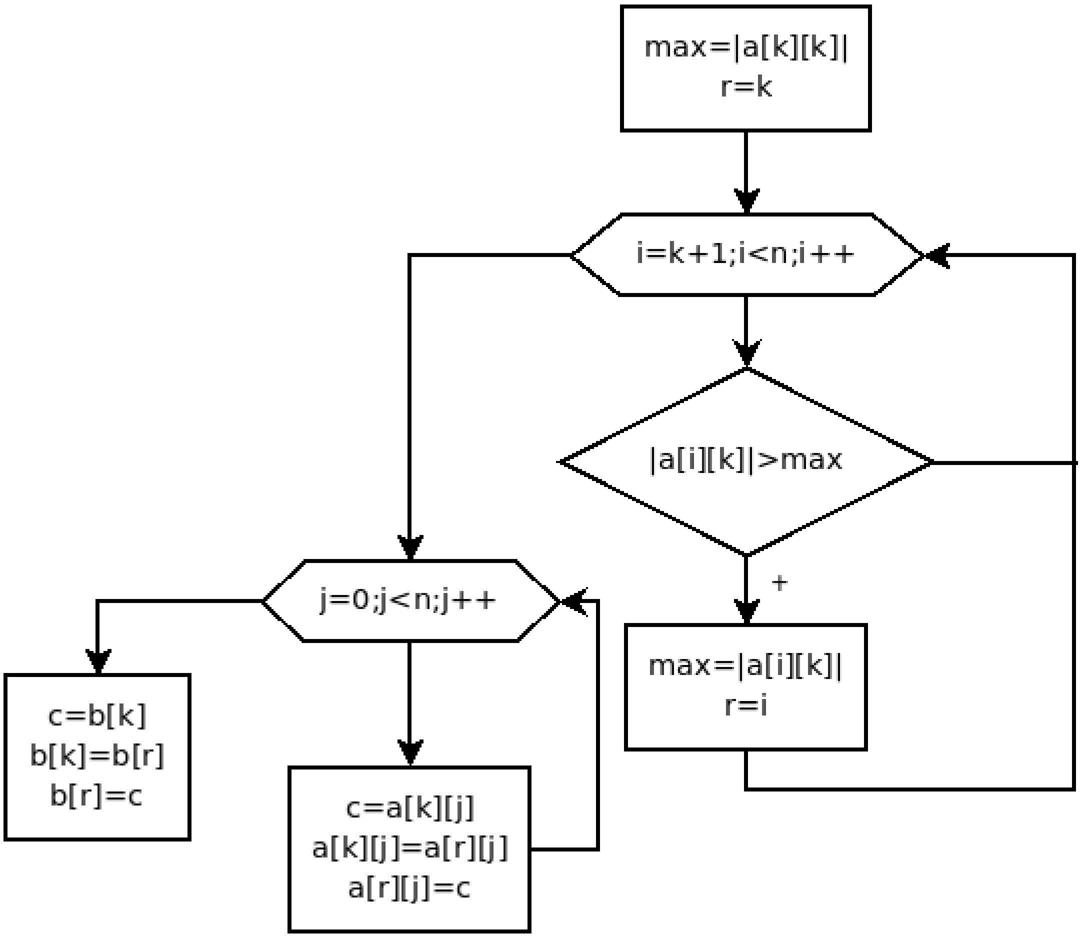


Рис 7.2. Блок-схема алгоритма перестановки строк расширенной матрицы

Решение системы (7.4) называют *обратным ходом метода Гаусса*.

Последнее (*n-1)*-е уравнение системы (7.4) имеет вид:

$$a_{n-1n-1}x_{n-1}=b_{n-1} \quad .$$

Если $a_{n-1n-1}\neq 0$, то $x_{n-1}=\dfrac{b_{n-1}}{a_{n-1n-1}}$.

В случае, если $a_{n-1n-1}=0$ и $b_{n-1}=0$, система имеет бесконечное множество решений.

При $a_{n-1n-1}=0$ и $b_{n-1}\neq 0$ система решений не имеет.

Предпоследнее (*n–2*)-е уравнение системы (7.4) имеет вид

$$a_{n-2n-2}x_{n-2}+a_{n-2n-1}x_{n-1}=b_{n-2} \quad .$$

Откуда

$$x_{n-2}=\frac{b_{n-2}-a_{n-2\mathrm{n}-1}\,x_{n-1}}{a_{n-2\mathrm{n}-2}}\quad .$$

Следующее (n–3) -е уравнение системы (7.4) будет выглядеть так:

$$a_{n-3\mathrm{n}-3}\,x_{n-3}+a_{n-3\mathrm{n}-2}\,x_{n-2}+a_{n-3\mathrm{n}-1}\,x_{n-1}=b_{n-3}\quad ,$$

и откуда находим:

$$x_{n-3}=\frac{b_{n-3}-a_{n-3\mathrm{n}-2}\,x_{n-2}-a_{n-3\mathrm{n}-1}\,x_{n-1}}{a_{n-3\mathrm{n}-3}}$$

Отсюда имеем:

$$x_{n-3}=b_{n-3}-\frac{(a_{n-3\mathrm{n}-2}\,x_{n-2}+a_{n-2\mathrm{n}-1}\,x_{n-1})}{a_{n-3\mathrm{n}-3}}=\frac{b_{n-3}-\sum_{j=n-2}^{n-1}a_{n-3\,j}\,x_j}{a_{n-3\mathrm{n}-3}}\quad .$$

Таким образом, формула для вычисления i-го значения $\boldsymbol{x}$ будет иметь вид:

$$x_i=\frac{b_i-\sum_{j=i+1}^{n-1}a_{ij}\,x_j}{a_{ii}}\quad \mathrm{i=n-1,...,0}$$

Алгоритм, реализующий обратный ход метода Гаусса, представлен в виде блок-схемы на рис. 7.3.

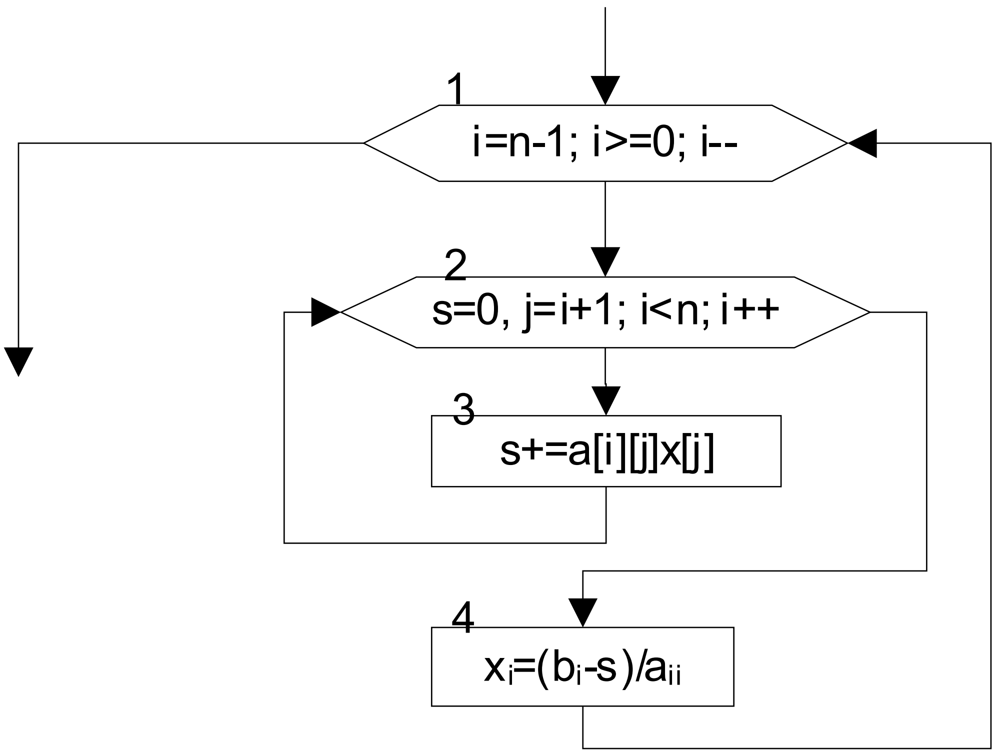


Рис 7.3. Блок-схема обратного хода метода Гаусса

На рис.7.4 изображена общая блок-схема метода Гаусса.

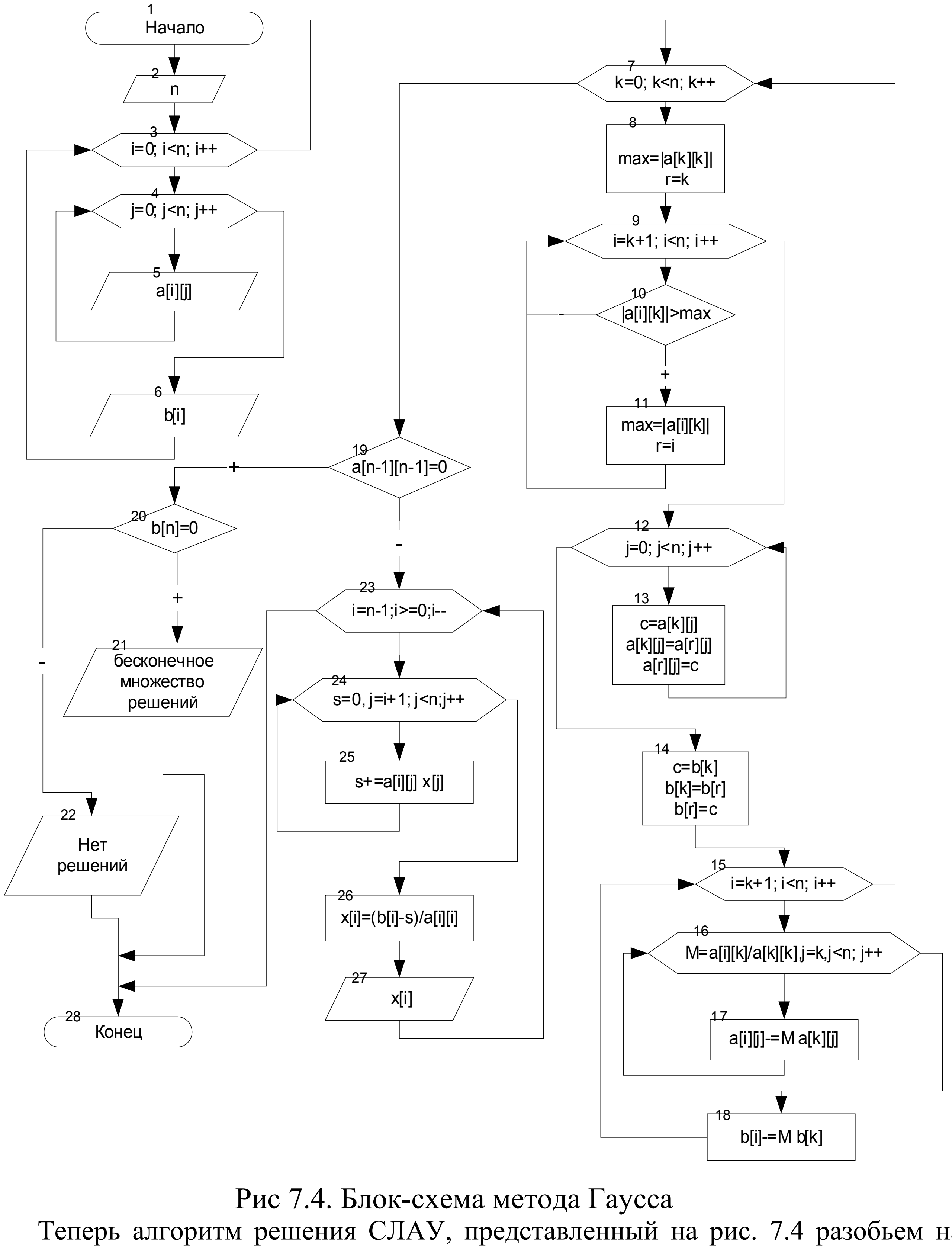


Рис 7.4. Блок-схема метода Гаусса

Теперь алгоритм решения СЛАУ, представленный на рис. 7.4 разобьем на главную функцию main() и функцию решения СЛАУ методом Гаусса. В функции main() вводятся исходные данные, затем вызывается функция SLAU решения системы линейных алгебраических уравнений и выводится вектор решения. Функция SLAU предназначена для решения системы линейных алгебраических уравнений методом Гаусса.

При написании функции следует учитывать следующее: в методе Гаусса изменяются матрица коэффициентов и вектор правых частей. Поэтому, для того чтобы их не испортить, в функции SLAU матрицу коэффициентов и вектор правых частей необходимо скопировать во внутренние (рабочие) переменные, и в функции обрабатывать внутренние переменные-копии.

Функция SLAU возвращает значение 0, если решение найдено, 1 – если система имеет бесконечное множество решений, 2 – если система не имеет решений.

```
int SLAU(double **matrica_a,int n,double *massiv_b,
 double *x)
{
    int i,j,k,r;
   double c,M,max,s, **a, *b;
   a=new double *[n];
   for(i=0;i<n;i++)
   a[i]=new double[n];
   b=new double [n];
    for(i=0;i<n;i++)
        for(j=0;j<n;j++)
            a[i][j]=matrica_a[i][j];
    for(i=0;i<n;i++)
        b[i]=massiv_b[i];
       for(k=0;k<n;k++)
   {
       max=fabs(a[k][k]);
       r=k;
       for(i=k+1;i<n;i++)
           if (fabs(a[i][k])>max)
           {
               max=fabs(a[i][k]);
               r=i;
           }
       for(j=0;j<n;j++)
       {
           c=a[k][j];   a[k][j]=a[r][j];
           a[r][j]=c;
       }
       c=b[k];b[k]=b[r];b[r]=c;
       for(i=k+1;i<n;i++)
       {
           for(M=a[i][k]/a[k][k],j=k;j<n;j++)
               a[i][j]-=M*a[k][j];
           b[i]-=M*b[k];
       }    }
   if (a[n-1][n-1]==0)
```

```
        if(b[n-1]==0)
            return -1;
        else return -2;
    else
    {
        for(i=n-1;i>=0;i--)
        {
            for(s=0,j=i+1;j<n;j++)
                s+=a[i][j]*x[j];
            x[i]=(b[i]-s)/a[i][i];
        }
        return 0;}
for(i=0;i<n;i++)
    delete [] a[i];
delete [] a;
delete [] b;
}
int main()
{int result,i,j,N;
double **a, *b, *x;
cout<<"N=";        cin>>N;
a=new double *[N];
for(i=0;i<N;i++)
    a[i]=new double[N];
b=new double [N];
x=new double [N];
cout<<"Input Matrix A"<<endl;
for(i=0;i<N;i++)
    for(j=0;j<N;j++)
        cin>>a[i][j];
cout<<"Input massiv B"<<endl;
for(i=0;i<N;i++)
    cin>>b[i];
result=SLAU(a,N,b,x);
if (result==0)
{  cout<<"Massiv X"<<endl;
    for(i=0;i<N;i++)
        cout<<x[i]<<"\t";
    cout<<endl;
}
else if (result==-1)
            cout<<"Great number of Solution";
        else if (result==-2)
            cout<<"No solution";
for(i=0;i<N;i++)
```

```
    delete [] a[i];
  delete [] a; delete [] b; delete [] x; }
```

7.2.Вычисление обратной матрицы методом Гаусса

ЗАДАЧА 7.2. Найти обратную матрицу к квадратной матрицы A(N,N).

$$A=\begin{vmatrix} a_{00} & a_{01} & \ldots & a_{0n-1} \\ a_{10} & a_{11} & \ldots & a_{1n-1} \\ a_{20} & a_{21} & \ldots & a_{2n-1} \\ & \ldots & & \\ a_{n-10} & a_{n-11} & \ldots & a_{n-1n-1} \end{vmatrix} \qquad (7.5)$$

Найти матрицу A^{-1}:

$$A^{-1}=\begin{vmatrix} y_{00} & y_{01} & \ldots & y_{0n-1} \\ y_{10} & y_{11} & \ldots & y_{1n-1} \\ & \ldots & & \\ y_{n-10} & y_{n-11} & \ldots & y_{n-1n-1} \end{vmatrix} \qquad (7.6)$$

Матрица (7.6) будет обратной к матрице (7.5), если выполняется соотношение

$$A \cdot A^{-1} = E \ ,$$

где E – это единичная матрица, или подробнее:

$$\begin{vmatrix} a_{00} & a_{01} & \ldots & a_{0n-1} \\ a_{10} & a_{11} & \ldots & a_{1n-1} \\ a_{20} & a_{21} & \ldots & a_{2n-1} \\ & \ldots & & \\ a_{n-10} & a_{n-11} & \ldots & a_{n-1n-1} \end{vmatrix} \times \begin{vmatrix} y_{00} & y_{01} & \ldots & y_{0n-1} \\ y_{10} & y_{11} & \ldots & y_{1n-1} \\ y_{20} & y_{21} & \ldots & y_{2n-1} \\ & \ldots & & \\ y_{n-10} & y_{n-11} & \ldots & y_{n-1n-1} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & 1 & \ldots & 0 \\ 0 & 0 & \ldots & 1 \\ & & \ldots & \\ 0 & 0 & \ldots & 1 \end{vmatrix}$$

Умножение матрицы (7.5) на нулевой столбец матрицы (7.6) даст нулевой столбец единичной матрицы:

$$\begin{gathered} a_{00} y_{00} + a_{01} y_{10} + \ldots + a_{0n-1} y_{n-10} = 1 \\ a_{10} y_{00} + a_{11} y_{10} + \ldots + a_{1n-1} y_{n-10} = 0 \\ \ldots \\ a_{n-10} y_{00} + a_{n-11} y_{10} + \ldots + a_{n-1n-1} y_{n-10} = 0 \end{gathered}$$

Система, полученная в результате умножения матрицы (7.5) на i-й столбец матрицы (7.6), будет выглядеть так:

$$\begin{gathered} a_{00} y_{0i} + a_{01} y_{1i} + \ldots + a_{0n-1} y_{n-1i} = 0 \\ a_{10} + y_{0i} + a_{11} y_{1i} + \ldots + a_{1n-1} y_{n-1i} = 0 \\ \ldots \\ a_{i0} y_{0i} + a_{i1} y_{1i} + \ldots + a_{¿-1} y_{n-1i} = 1 \\ \ldots \\ a_{n-10} y_{0i} + a_{n-11} y_{1i} + \ldots + a_{n-1n-1} y_{n-1i} = 0 \end{gathered}$$

А n-я система будет иметь вид:

$$\begin{array}{c} a_{00}\,y_{0\mathrm{n}-1}+a_{01}\,y_{1\mathrm{n}-1}+\ldots+a_{0\mathrm{n}-1}\,y_{n-1\mathrm{n}-1}=0 \\ a_{10}\,y_{0\mathrm{n}-1}+a_{11}\,y_{1\mathrm{n}-1}+\ldots+a_{1\mathrm{n}-1}\,y_{n-1\mathrm{n}-1}=0 \\ \ldots \\ a_{n-10}\,y_{0\mathrm{n}-1}+a_{n-11}\,y_{1\mathrm{n}-1}+\ldots+a_{n-1\mathrm{n}-1}\,y_{n-1\mathrm{n}-1}=1 \end{array}.$$

Алгоритм нахождения обратной матрицы представлен в виде блок-схемы на рис. 7.5. Блоки 2–5 отражают формирование столбца единичной матрицы. Если условие 3 выполняется и элемент находится на главной диагонали, то он равен единице, все остальные элементы нулевые. В блоке 6 происходит вызов подпрограммы для решения системы уравнений методом Гаусса. В качестве параметров в эту подпрограмму передается исходная матрица A, сформированный в пунктах 2–5 вектор свободных коэффициентов B, размерность системы n. Вектор X будет решением *i-ой* системы уравнений и, следовательно, *i-ым* столбцом искомой матрицы Y.

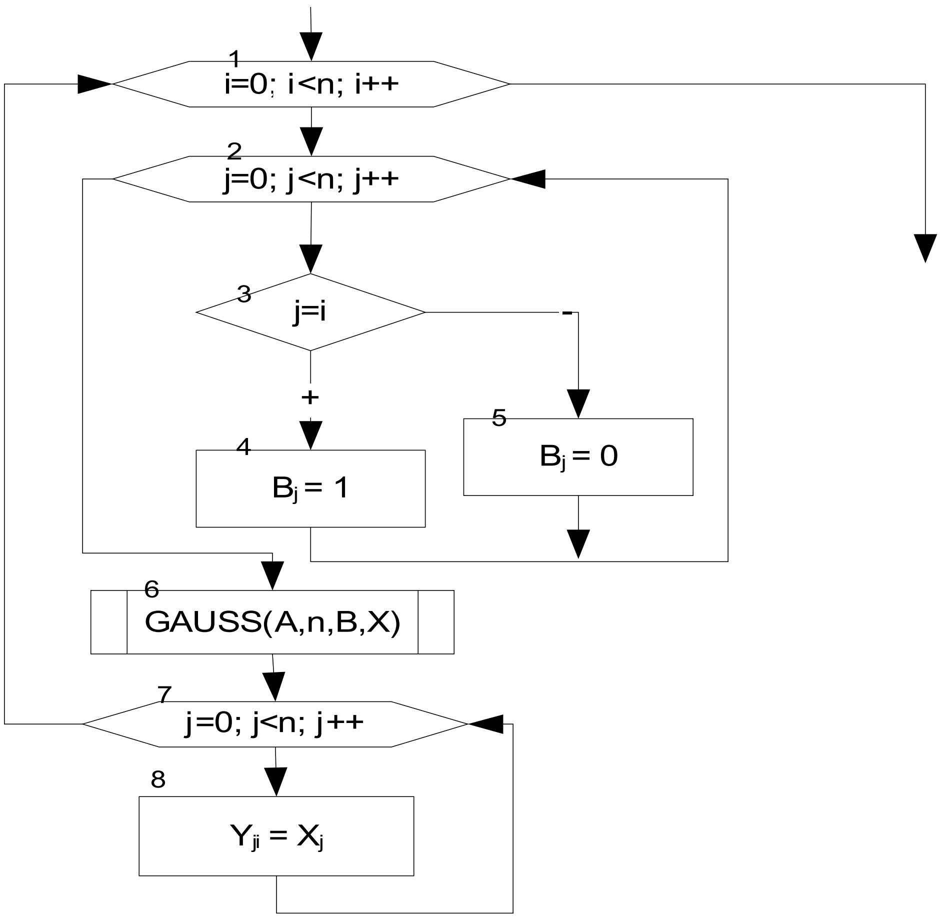


Рис 7.5. Блок-схема нахождения обратной матрицы

```
  int SLAU(double **matrica_a,  int n, double *massiv_b,
double *x)
  {
     int i,j,k,r;
     double c,M,max,s, **a, *b;
     a=new double *[n];
     for(i=0;i<n;i++) a[i]=new double[n];
```

```
   b=new double [n];
   for(i=0;i<n;i++)
        for(j=0;j<n;j++)
             a[i][j]=matrica_a[i][j];
   for(i=0;i<n;i++)
        b[i]=massiv_b[i];
   for(k=0;k<n;k++)
   {         max=fabs(a[k][k]);
             r=k;
        for(i=k+1;i<n;i++)
             if (fabs(a[i][k])>max)
             {    max=fabs(a[i][k]);
                  r=i;}
        for(j=0;j<n;j++)
        {    c=a[k][j];
             a[k][j]=a[r][j];
             a[r][j]=c;   }
        c=b[k];      b[k]=b[r];       b[r]=c;
        for(i=k+1;i<n;i++)
        {    for(M=a[i][k]/a[k][k],j=k;j<n;j++)
             a[i][j]-=M*a[k][j];
             b[i]-=M*b[k];
        }
}
   if (a[n-1][n-1]==0)
        if(b[n-1]==0)    return -1;
        else return -2;
   else
   {for(i=n-1;i>=0;i--)
        {for(s=0,j=i+1;j<n;j++)
             s+=a[i][j]*x[j];
             x[i]=(b[i]-s)/a[i][i];
        }return 0;   }
for(i=0;i<n;i++)
delete [] a[i];
delete [] a;
delete [] b;
}
int INVERSE(double **a, int n, double **y)
{  int i,j,res;
   double *b, *x;
   b=new double [n];
   x=new double [n];
   for(i=0;i<n;i++)
   {for(j=0;j<n;j++)
```

```
        if (j==i)    b[j]=1;  else     b[j]=0;
            res=SLAU(a,n,b,x);
            if (res!=0)  break;
                else for(j=0;j<n;j++)
                        y[j][i]=x[j];
    }
  delete [] x;
  delete [] b;
    if (res!=0)      return -1;
    else         return 0;}
  int main()
  { int result,i,j,N;
  double **a, **b;
  cout<<"N=";    cin>>N;
  a=new double *[N];
  for(i=0;i<N;i++)
    a[i]=new double[N];
  b=new double *[N];
  for(i=0;i<N;i++)
    b[i]=new double[N];
  cout<<"Input Matrix A"<<endl;
  for(i=0;i<N;i++)
    for(j=0;j<N;j++)
        cin>>a[i][j];
  result=INVERSE(a,N,b);
  if (result==0)
  {  cout<<"Inverse matrix"<<endl;
    for(i=0;i<N;cout<<endl,i++)
        for(j=0;j<N;j++)
            cout<<b[i][j]<<"\t";
  }
  else   cout<<"No Inverse matrix"<<endl;
  for(i=0;i<N;i++)
    delete [] a[i];
  delete [] a;
  for(i=0;i<N;i++)
    delete [] b[i];
  delete [] b;
  }
```

7.3. Вычисление определителя методом Гаусса

ЗАДАЧА 7.3. Найти определитель квадратной матрицы A(N,N).

Для верхнетреугольной матрицы определитель вычисляется как произведение элементов , лежащих на главной диагонали $det\,A=\sum_{i=0}^{n-1} a_{ii}$.

Поэтому матрицу вначале преобразуем к верхнетреугольному виду, а затем найдем произведение элементов на главной диагонали.

Преобразование матрицы (7.2) к виду (7.3) можно осуществить с помощью прямого хода метода Гаусса. Алгоритм вычисления определителя матрицы, изображенный в виде блок-схемы на рис. 7.6, представляет собой алгоритм прямого хода метода Гаусса, в процессе выполнения которого проводится перестановка строк матрицы.

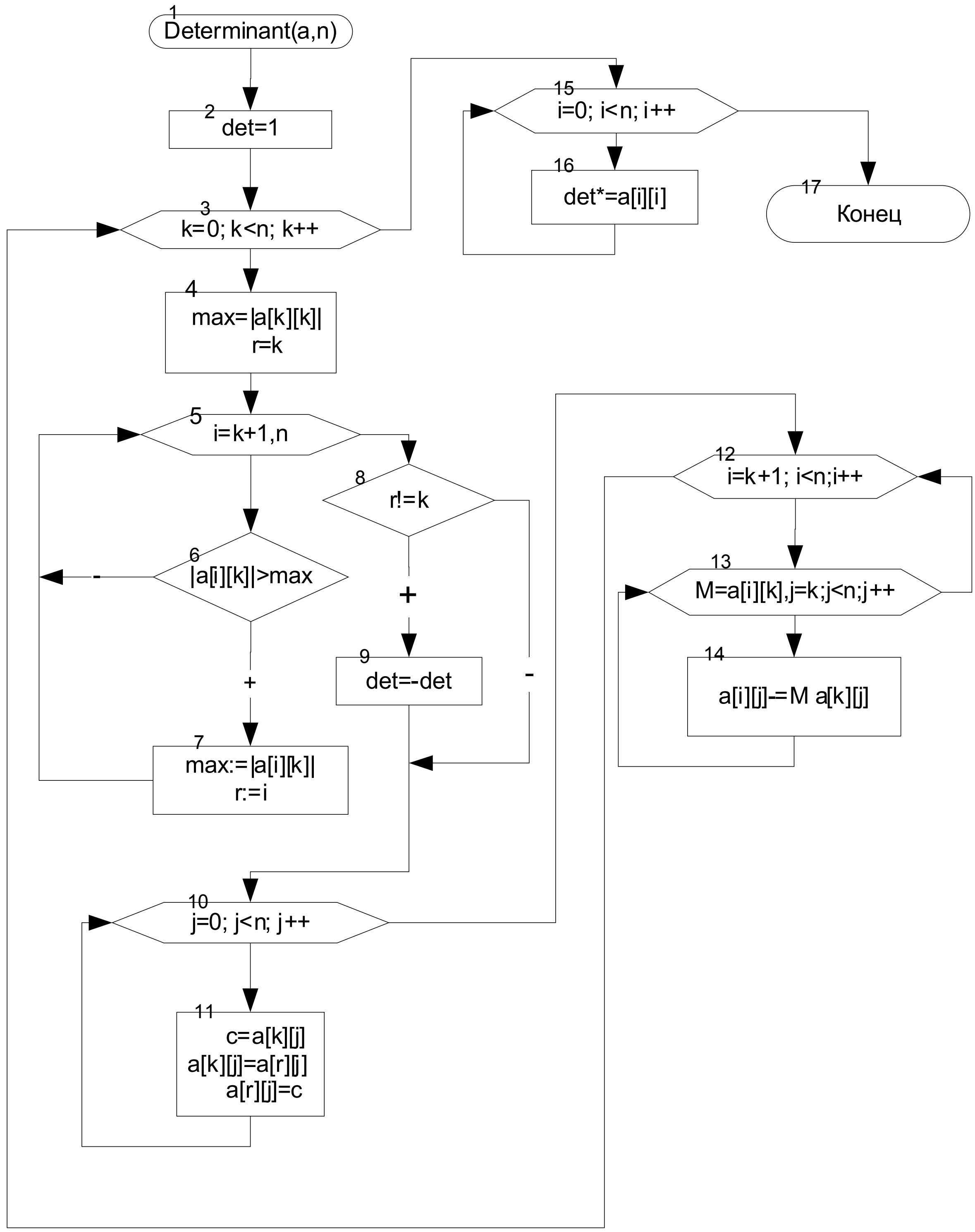


Рис 7.6. Блок-схема вычисления определителя квадратной матрицы

Если строки в матрице поменять местами, то определитель матрицы меняет знак на противоположный. В блок-схеме момент смены знака отражен в блоках 8–9. В блоке 8 определяется, будут ли строки меняться местами, и если ответ утвердительный, то в блоке 9 происходит смена знака определителя. В блоках 15–16 выполняется непосредственное вычисление определителя путем перемножения диагональных элементов преобразованной матрицы.

```
double determinant(double **matrica_a, int n)
{ int i,j,k,r; double c,M,max,s,det=1, **a;
   a=new double *[n];
   for(i=0;i<n;i++) a[i]=new double[n];
   for(i=0;i<n;i++)
         for(j=0;j<n;j++)
             a[i][j]=matrica_a[i][j];
   for(k=0;k<n;k++)
   {
        max=fabs(a[k][k]);        r=k;
        for(i=k+1;i<n;i++)
             if (fabs(a[i][k])>max)
             {    max=fabs(a[i][k]);    r=i;     }
        if (r!=k) det=-det;
        for(j=0;j<n;j++)
        {c=a[k][j];  a[k][j]=a[r][j];     a[r][j]=c;   }
        for(i=k+1;i<n;i++)
             for(M=a[i][k]/a[k][k],j=k;j<n;j++)
                  a[i][j]-=M*a[k][j];
   }
   for(i=0;i<n;i++)
             det*=a[i][i];
   return det;
}
int main()
{
int result,i,j,N;
double **a, b;
cout<<"N=";          cin>>N;
a=new double *[N];
for(i=0;i<N;i++)    a[i]=new double[N];
cout<<"Input Matrix A"<<endl;
for(i=0;i<N;i++)
   for(j=0;j<N;j++)
        cin>>a[i][j];
cout<<"determinant="<<determinant(a,N)<<endl;
for(i=0;i<N;i++)
   delete [] a[i];
delete [] a;}
```