Глава 3 Решение систем линейных уравнений. Работа с матрицами OpenOffice.org Calc

В этой главе мы изучим возможности пакета OpenOffice.org Calc при решении систем линейных алгебраических уравнений и выполнении действий над матрицами. Предварительно вспомним некоторые сведения из курса высшей математики.

Решение систем линейных алгебраических уравнений (СЛАУ)

Пусть задана СЛАУ следующего вида:

$$a_{11}x_1+a_{12}x_2+\cdots+a_{1n}x_n=b_1$$
$$a_{21}x_1+a_{22}x_2+\cdots+a_{2n}x_n=b_2$$
$$a_{n1}x_1+a_{n2}x_2+\cdots+a_{nn}x_n=b_n$$

Эту систему можно представить в матричном виде ***AX=b***, где:

$$A=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ & & \cdots & \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}$$ матрица коэффициентов системы уравнений ;

$$X=\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \cdots \\ x_n \end{pmatrix}$$ вектор неизвестных , $$b=\begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \cdots \\ b_n \end{pmatrix}$$ вектор правых частей .

Пусть систему линейных алгебраических уравнений необходимо решать методом обратной матрицы и методом Крамера. Вспомним основные формулы, используемые в этих методах.

Метод обратной матрицы

Систему линейных алгебраических уравнений ***Ax=b*** умножим слева на матрицу, обратную к ***A***. Система уравнений примет вид:

$$A^{-1}\cdot A\cdot x=A^{-1}\cdot b,\quad E\cdot x=A^{-1}\cdot b\quad ,$$

где E единичная матрица. Таким образом, вектор неизвестных вычисляется по формуле:

$$x=A^{-1}\cdot b$$

Метод Крамера

В этом случае неизвестные x1,x2,& , xn вычисляются по формуле:

$$x_i=\frac{\Delta_i}{\Delta},\ i=1,\ldots,n$$

где Δ определитель матрицы А, ***i*** определитель матрицы , получаемой из матрицы А путем замены i-го столбца вектором ***b***.

Обратите внимание на особенность работы с самостоятельно созданными матричными формулами: необходимо предварительно выделять область, в которой будет храниться результат, а после получения результата преобразовывать его к матричному виду, нажав клавиши **Ctrl+Shift+Enter**. Если же вы используете функции **Мастера функций**, просто не забывайте включать флажок **Массив**.

Теперь рассмотрим решение системы линейных уравнений методом обратной матрицы и методом Крамера на следующих примерах.

ПРИМЕР 3.1. Решить систему методом обратной матрицы:

$$\begin{cases} x_2 - 13x_3 + 4x_4 = -5 \\ x_1 - 2x_3 + 3x_4 = -4 \\ 3x_1 + 21x_2 - 5x_4 = 2 \\ 4x_1 + 3x_2 - 5x_3 = 5 \end{cases}.$$

В этом случае матрица коэффициентов ***A*** и вектор свободных коэффициентов ***b*** имеют вид:

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & -13 & 4 \\ 1 & 0 & -2 & 3 \\ 3 & 21 & 0 & -5 \\ 4 & 3 & -5 & 0 \end{pmatrix}, \qquad b = \begin{pmatrix} -5 \\ -4 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}.$$

Введём матрицу ***A*** и вектор ***b*** в рабочий лист электронной таблицы OpenOffice.org Calc (рис. 3.1).

	A	B	C	D	E	F	G	H
1		0	1	-13	4		-5	
2	A=	1	0	-2	3	b=	-4	
3		3	21	0	-5		2	
4		4	3	-5	0		3	
5								

Рис. 3.1

В нашем случае матрица ***A*** находится в ячейках B1:E4, а вектор ***b*** в диапазоне G1:G4. Для решения системы методом обратной матрицы необходимо вычислить матрицу, обратную к ***A***. Для этого выделим ячейки для хранения обратной матрицы (это нужно сделать обязательно!!!); пусть в нашем случае это будут ячейки B6:E9. Теперь обратимся к **Мастеру функций**, в категории **Массив** выберем функцию **MINVERSE**, предназначенную для вычисления обратной матрицы (рис. 3.2), установим флажок **Массив,** щелкаем по кнопке **OK**, которая переведет нас ко второму шагу Мастера функций.

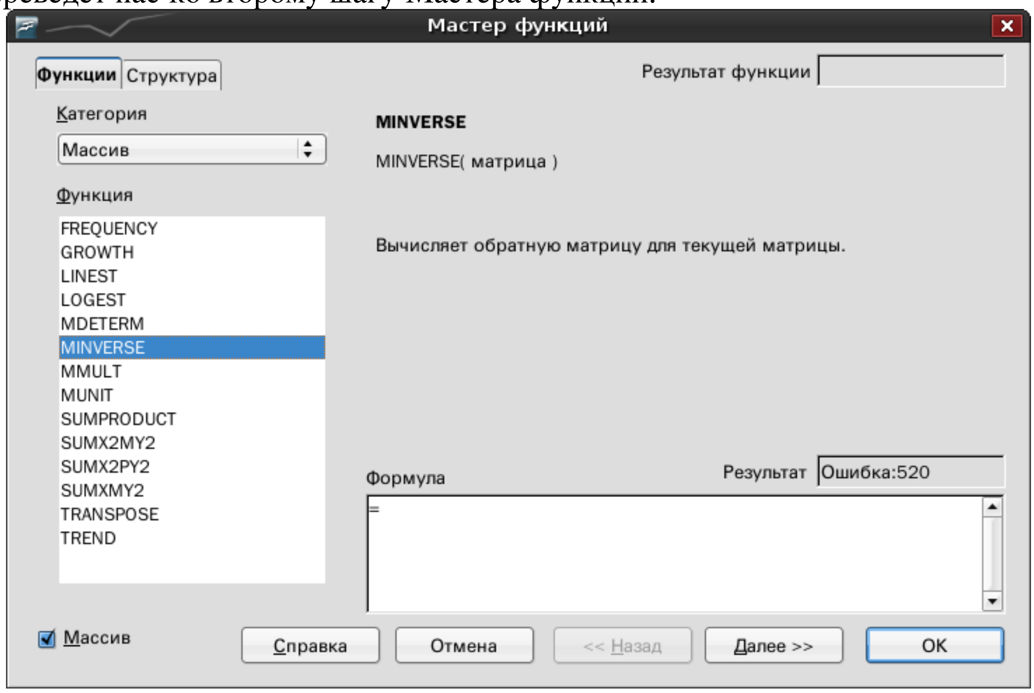

Рис. 3.2

В появившемся диалоговом окне необходимо заполнить поле ввода **Массив** (рис. 3.3). Это поле должно содержать диапазон ячеек, в котором хранится исходная матрица - в нашем случае B1:E4. Данные в поле ввода **Массив** можно ввести, используя клавиатуру или выделив их на рабочем листе, удерживая левую кнопку мыши.

Теперь можно нажать кнопку **OK,** что приведет к вычислению обратной матрицы. В нашем случае лист электронной таблицы OpenOffice.org Calc примет вид изображенный на рис. 3.4.

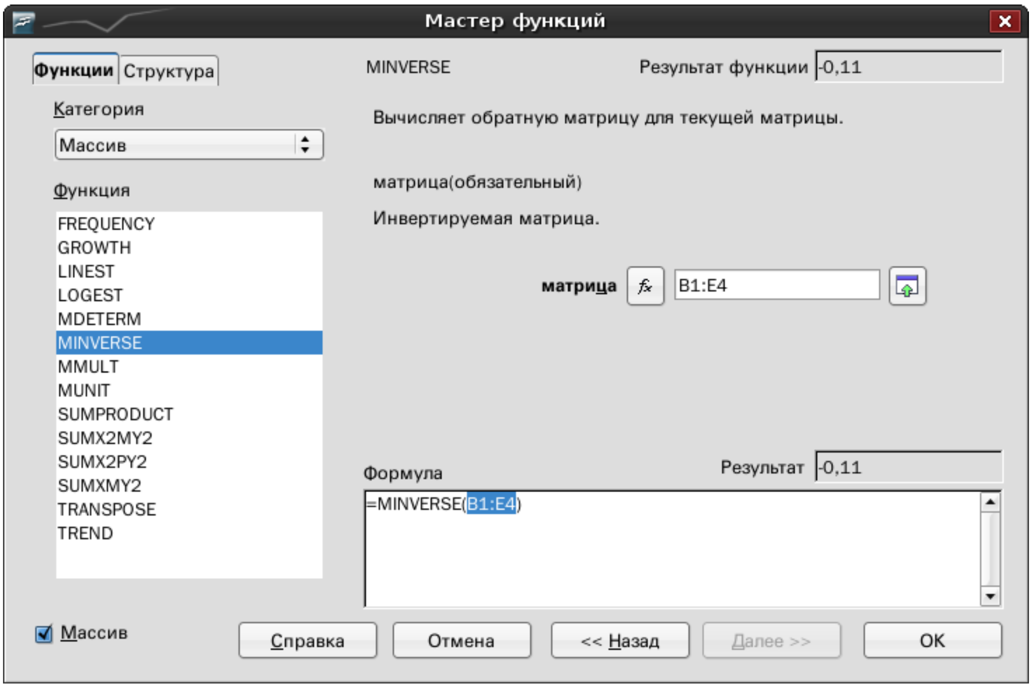

Рис. 3.3

	A	B	C	D	E	F	G
1		0	1	-13	4		-5
2	A=	1	0	-2	3	b=	-4
3		3	21	0	-5		2
4		4	3	-5	0		3
5							
6		-0,11	0,1	-0,03	0,25		
7		0,01	0,08	0,06	-0,06		
8		-0,08	0,12	0,01	-0,04		
9		-0,02	0,38	0,02	-0,11		
10							

Рис. 3.4

Теперь необходимо умножить полученную обратную матрицу на вектор ***b***. Выделим ячейки для хранения результирующего вектора, например G6:G9. Обратимся к **Мастеру функций**, и в категории **Массив** выберем функцию **MMULT**, которая предназначена для умножения матриц. Напомним, что умножение матриц происходит по правилу строка на столбец и матрицу ***A*** можно умножить на матрицу ***B*** только в том случае, если количество столбцов матрицы ***A*** равно количеству строк матрицы ***B***. Кроме того, при умножении матриц важен порядок сомножителей, т.е. AB≠BA.

Перейдём ко второму шагу мастера функций. Появившееся диалоговое окно (рис. 3.5) содержит два поля ввода первой и второй матриц. В первое поле **Матрица** необходимо ввести диапазон ячеек, в котором содержится первая из перемножаемых матриц, в нашем случае B6:E9 (обратная матрица), а во второе поле **Матрица** ячейки, содержащие вторую матрицу, в нашем случае G1:G4 (вектор ***b***). Для осуществления матричных операций необходимо включить флажок **Массив**.

Теперь нажимаем кнопку **OK**. В ячейках G6:G9 появится результирующая матрица. Чтобы проверить правильность решения системы уравнений, необходимо умножить матрицу ***A*** на вектор ***x*** и получить в результате вектор ***b***. Умножение матрицы ***A*** на вектор ***x*** осуществляется при помощи функции **MMULT**(B1:E4;G6:G9) так, как было описанной выше. В результате проведенных вычислений рабочий лист примет вид, изображенный на рис. 3.6.

ПРИМЕР 3.2. Решить систему из ПРИМЕРА 3.1 методом Крамера.

Введём матрицу ***A*** и вектор ***b*** на рабочий лист электронной таблицы OpenOffice.org Calc. Также сформируем четыре вспомогательные матрицы, заменяя последовательно столбцы матрицы ***A*** на столбец вектора ***b*** (рис. 3.7).

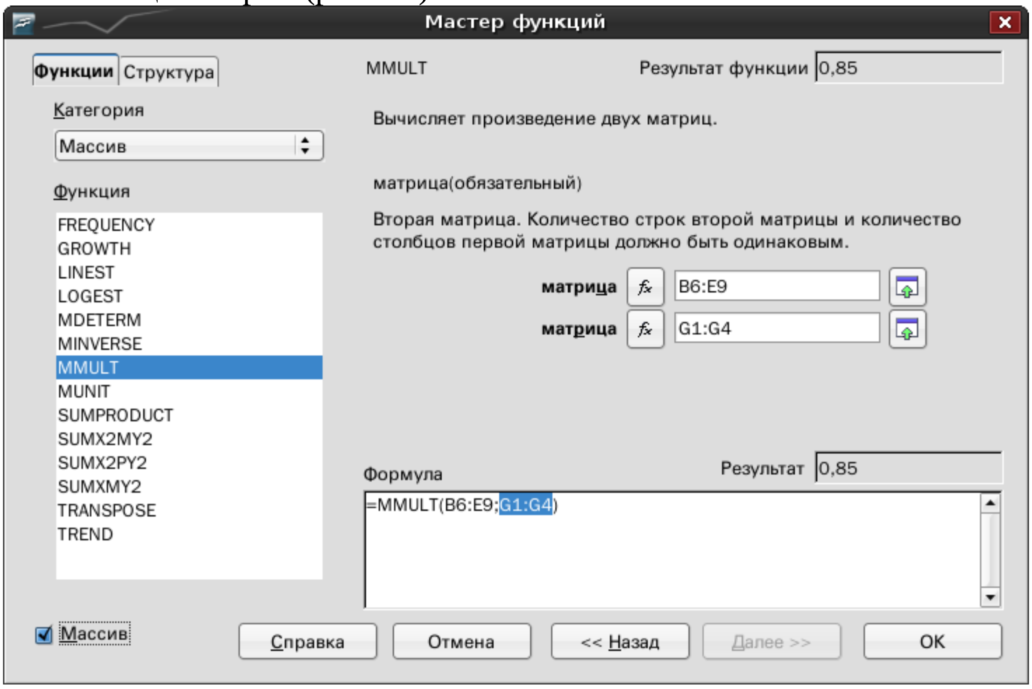

Рис. 3.5

	A	B	C	D	E	F	G	H	I
1		0	1	-13	4		-5		-5
2	A=	1	0	-2	3	b=	-4	Проверка	-4
3		3	21	0	-5		2		2
4		4	3	-5	0		3		3
5									
6		-0,11	0,1	-0,03	0,25		0,85		
7		0,01	0,08	0,06	-0,06	X=	-0,44		
8		-0,08	0,12	0,01	-0,04		-0,18		
9		-0,02	0,38	0,02	-0,11		-1,74		
10									

Рис. 3.6

Для дальнейшего решения необходимо вычислить определитель матрицы ***A***. Установим курсор в ячейку I10 и обратимся к **Мастеру функций**. В категории **Массив** выберем функцию **MDETERM**, предназначенную для вычисления определителя матрицы, и перейдём ко второму шагу Мастера функций, установив предварительно флажок **Массив**. Диалоговое окно, появляющееся на втором шаге, содержит поле ввода **Матрица**. В этом поле указывают диапазон матрицы, определитель которой вычисляется. В нашем случае это ячейки B1:E4.

Для вычисления вспомогательных определителей введем формулы:

I11=MDETERM(B6:E9),

I12=MDETERM(B11:E14),

I13=MDETERM(B16:E19),

I14=MDETERM(B21:E24).

В результате в ячейке I10 хранится главный определитель, а в ячейках I11:I14 вспомогательные.

Воспользуемся формулами Крамера и разделим последовательно вспомогательные определители на главный. В ячейку K11 введём формулу **=I11/I10**. Затем скопируем её содержимое в ячейки K12, K13 и K14. Система решена.

<u>ПРИМЕР 3.3.</u> Вычислить матрицу ***C*** по формуле: ***C=A²+2AB***, где:

$$A=\begin{pmatrix} 3 & 9 & -2 \\ 2 & -13 & 3 \\ 11 & 2 & 4 \end{pmatrix};\quad B=\begin{pmatrix} 1 & 4 & 11 \\ 4 & 5 & 5 \\ 11 & 3 & 7 \end{pmatrix}.$$

Введем исходные данные на рабочий лист (рис. 3.8).

	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J	K
1		0	1	-13	4		-5				
2	A=	1	0	-2	3	b=	-4				
3		3	21	0	-5		2				
4		4	3	-5	0		3				
5											
6		-5	1	-13	4						
7	A1=	-4	0	-2	3						
8		2	21	0	-5						
9		3	3	-5	0						
10								d=	2580		
11		0	-5	-13	4			d1=	2192		0,849612
12	A2=	1	-4	-2	3			d2=	-1136	X=	-0,44031
13		3	2	0	-5			d3=	-476		-0,1845
14		4	3	-5	0			d4=	-4488		-1,73953
15											
16		0	1	-5	4						
17	A3=	1	0	-4	3						
18		3	21	2	-5						
19		4	3	3	0						
20											
21		0	1	-13	-5						
22	A4=	1	0	-2	-4						
23		3	21	0	2						
24		4	3	-5	3						

Рис. 3.7

Для умножения матрицы ***A*** на матрицу ***B***, выделим диапазон B5:D7 и воспользуемся функцией MMULT(B1:D3;G1:I3). Результат вычисления A^2=A*A поместим в ячейки G5:I7, воспользовавшись формулой MMULT(B1:D3;B1:D3).

Умножение (деление) матрицы на число можно выполнить при помощи элементарных операций. В нашем случае необходимо умножить матрицу из диапазона B5:D7 на число 2. Выделим ячейки B9:D11 и введем формулу =2*B5:D7.

Сложение (вычитание) матриц выполняется аналогично. Например, выделим диапазон G9:I11 и введем формул =B9:D11+G5:I7. Для получения результата в обоих случаях необходимо нажать комбинацию клавиш **Ctrl+Shift+Enter**[1].

	A	B	C	D	E	F	G	H	I
1		3	9	-2			1	4	11
2	A=	2	-13	3		B=	4	5	5
3		11	2	4			11	3	7
4									
5		17	51	64			5	-94	13
6	AB=	-17	-48	-22		A^2	13	193	-31
7		63	66	159			81	81	0
8									
9		34	102	128			39	8	141
10	2AB=	-34	-96	-44		$C=A^2+2AB=$	-21	97	-75
11		126	132	318			207	213	318

Рис. 3.8

1 Обратите внимание, что нужно нажимать правые клавиши **Ctrl** и **Shift**.