Численное решение трансцендентных и нелинейных уравнений

f(x)=0

- ***отделение корней уравнения***
- ***уточнение отделенных корней***

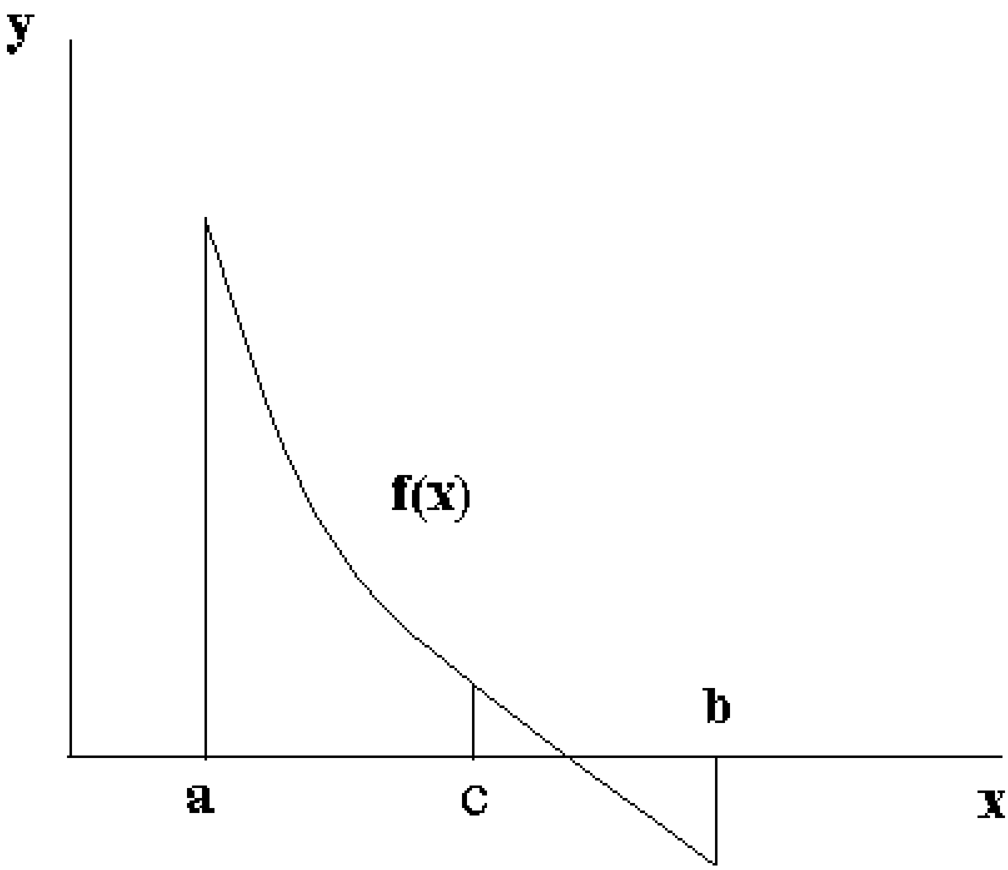
Функция **f(x)** должна удовлетворять следующим условиям на интервале **[a,b]**:

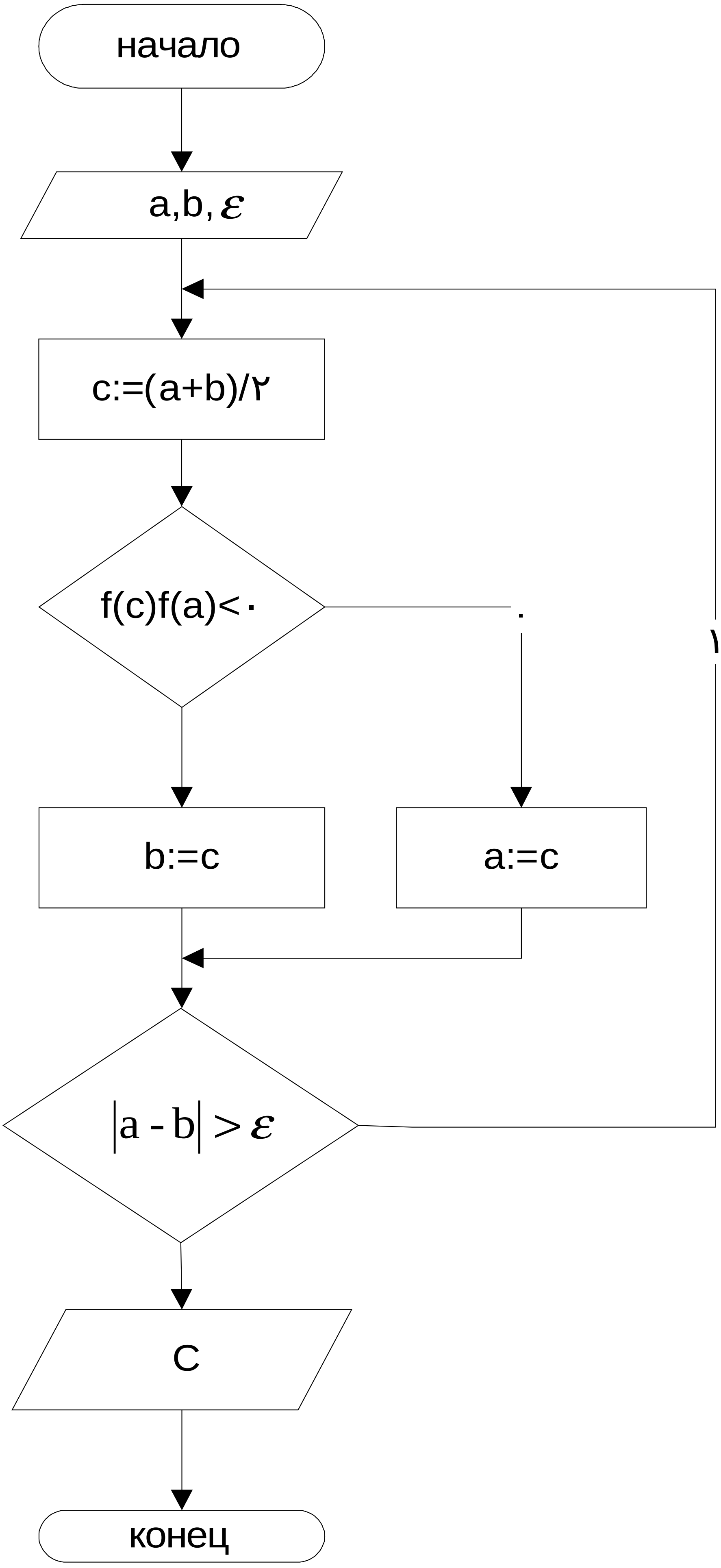
1. Функция **f(x)** непрерывна вместе со своими производными первого и второго порядка. Функция **f(x)** на концах интервала **[a,b]** имела разные знаки **f(a)·f(b)<0**;
2. Первая и вторая производные **f'(x)** и **f''(x)** сохраняют определенный знак на всем интервале **[a,b]**

Метод половинного деления (дихотомии).

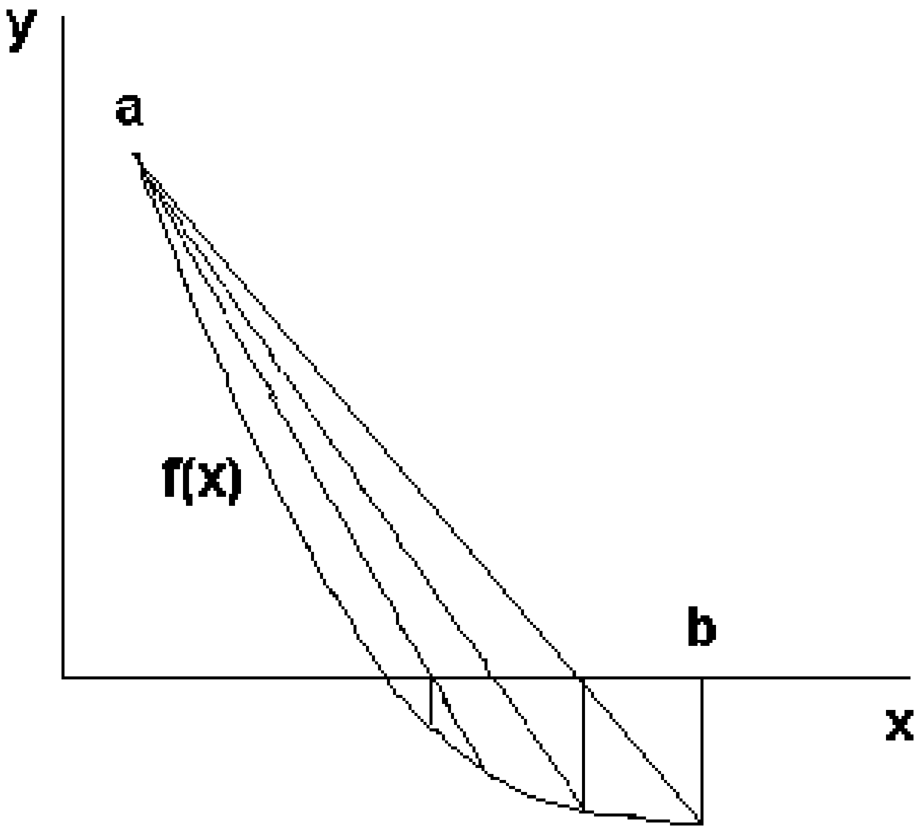
Алгоритм

1. Находим точку **c=(a+b)/2**;
2. Находим значение **f(c)**;
3. Если **f(a)·f(c)<0** то корень лежит на интервале**[a,c]** иначе корень лежит на интервале**[c,b]**;
4. Если величина интервала **≤** ε , то найден корень с точностью ε **,** иначе переходим к п.1.




начало
a,b,ε
c:=(a+b)/٢
f(c)f(a)<٠
٠
١
b:=c
a:=c
|a - b| > ε
c
конец

Метод хорд



Уравнение прямой, проходящей через точки с координатами **(a,f(a))** и **(b,f(b))**:

$$\frac{y-f(a)}{f(b)-f(a)}=\frac{x-a}{b-a}$$

$$y=\frac{f(b)-f(a)}{b-a}\cdot(x-a)+f(a)$$

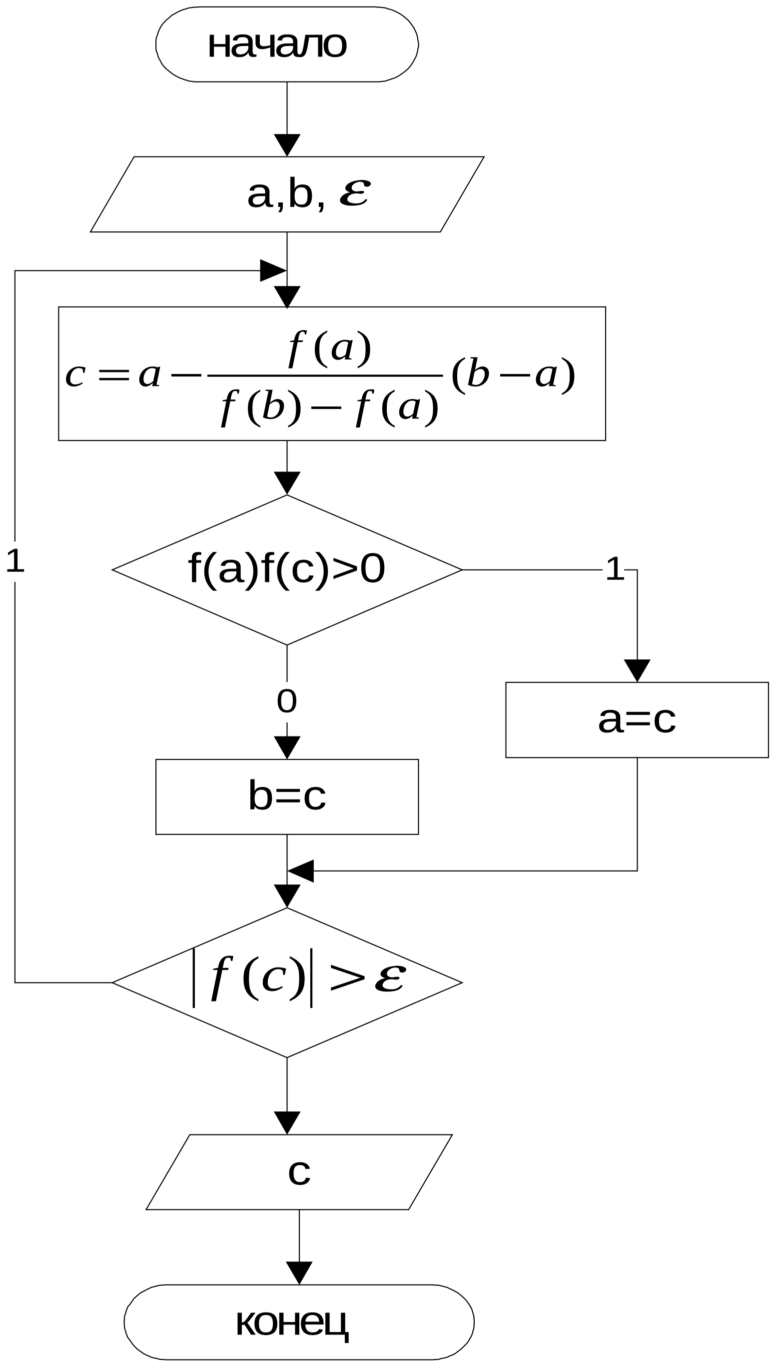
Условие пересечение прямой оси OX

y=0

$$0=\frac{f(b)-f(a)}{b-a}\cdot(x-a)+f(a),$$

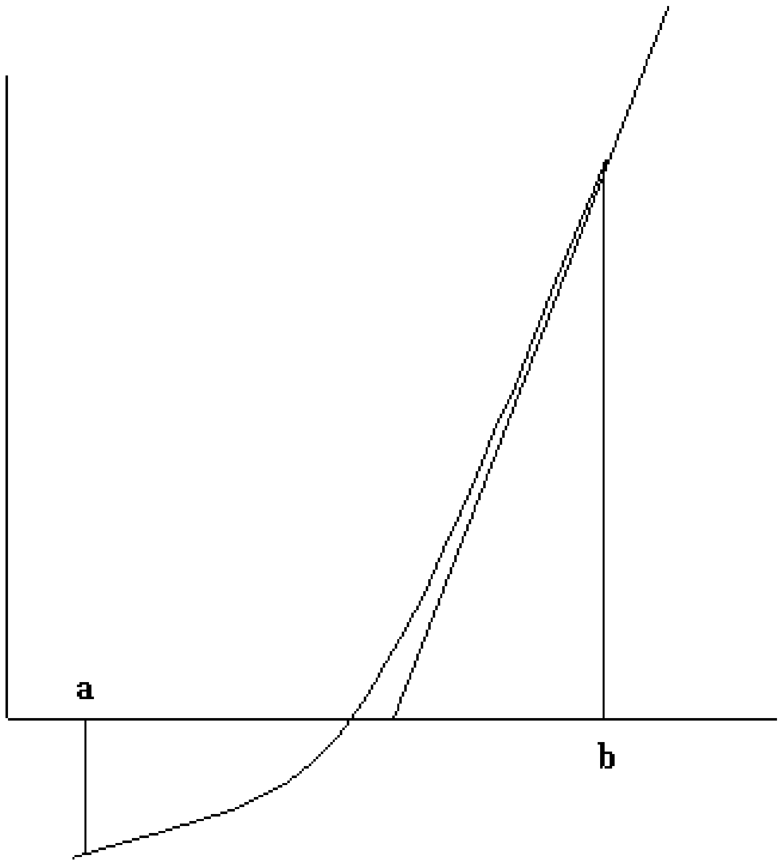
$$x=a-\frac{f(a)\cdot(b-a)}{f(b)-f(a)},$$

$$c=a-\frac{f(a)}{f(b)-f(a)}(b-a)$$


начало
a,b, ε
$c = a - \frac{f(a)}{f(b) - f(a)}(b - a)$
f(a)f(c)>0
1
0
1
a=c
b=c
$|f(c)| > \varepsilon$
c
конец

Метод касательных (метод Ньютона)

В одной из точек интервала **[a,b],** пусть это будет точка **c**, проводят касательную.



Запишем уравнение этой прямой.

y = kx + m

Прямая является касательной и проходит через точку (c,f(c))

k=f'(c).

y=f'(c)x+m

f(c)=f′ (c)c+m

m=f(c)–cf'(c)

y=f' (c)x+f(c)–cf'(c)

y =f'(c)(x-c)+f(c)

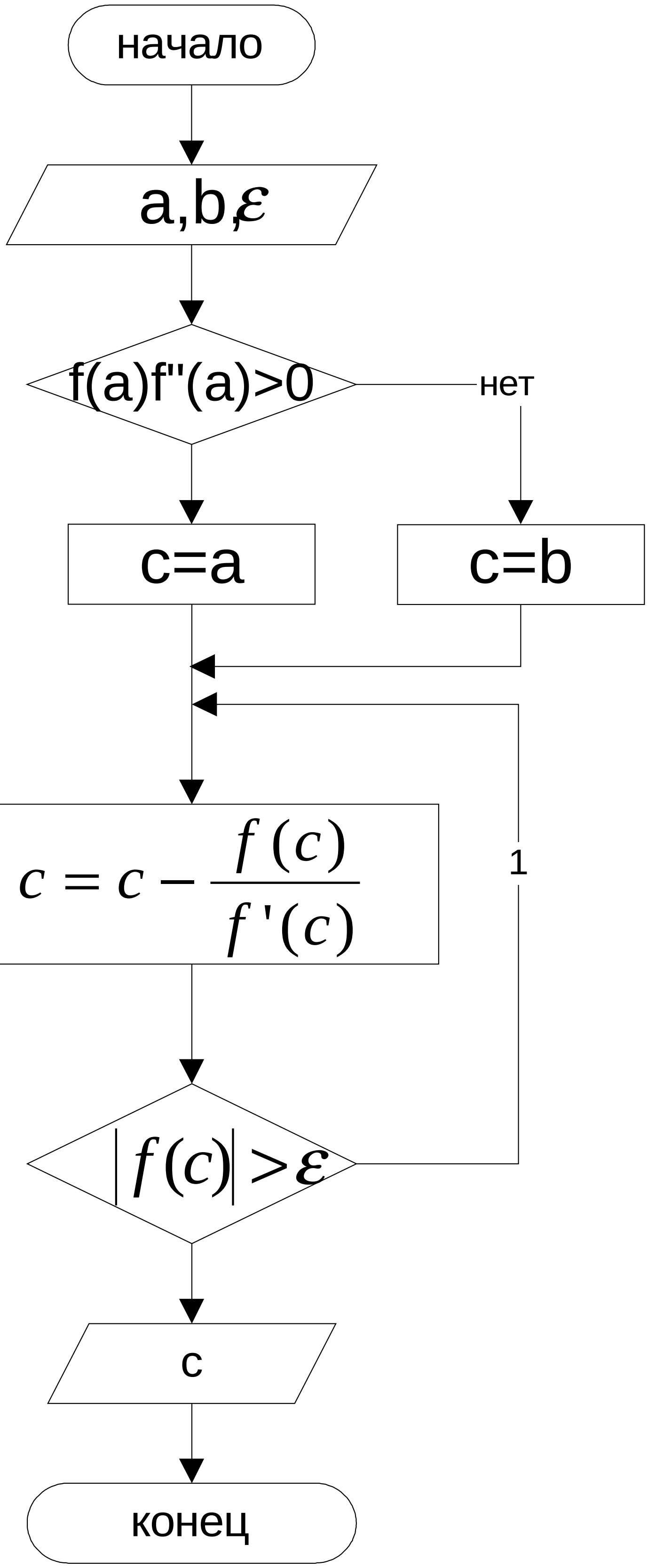
Найдем точку пересечения касательной с осью **X**.

f'(c)(x-c)+f(c) = 0

$$x = c - \frac{f(c)}{f'(c)}$$

В качестве точки начального приближения **c** необходимо выбрать точку, в которой совпадают знак функции и второй производной.

А так как мы сделали допущение, что вторая и первая производные не меняют знак, то можно проверить условие **f(x)f''(x)>0** на обоих концах интервала и в качестве начального приближения взять ту точку, где это условие выполняется.



Метод простой итерации

$$x = \varphi(x) \ ,$$

x_0 є [a,b]

$$x_{k+1} = \varphi(x_k) \ , \qquad \mathbf{k = 0,1,2,...}$$

$$\left| x_{k+1} - x_k \right| < \varepsilon$$

Достаточное условие сходимости метода простой итерации

Если неравенство $\left|\varphi'(x)\right| < 1$ выполняется на всем интервале **[a,b],** то последовательность x_0, x_1, x_2, ... , x_n, .. сходится к решению x*.