

## 12 Решение дифференциальных уравнений в частных производных

Математические модели физических и иных процессов описываются с помощью дифференциальных уравнений в частных производных<sup>1</sup>. Аргументами функций этих уравнений являются пространственные координаты  $x$ ,  $y$ ,  $z$  и время  $t$ . Общие сведения о дифференциальных уравнениях в частных производных приведены в первом параграфе главы. В Scilab, как и в большинстве математических пакетов, нет средств для непосредственного решения уравнений математической физики. Однако, возможностей пакета достаточно, для реализации метода сеток решения дифференциальных уравнений в частных производных. В последующих параграфах этой главы и описана реализация метода сеток для решения параболических, гиперболических и эллиптических уравнений в Scilab.

### 12.1 Общие сведения о дифференциальных уравнениях в частных производных

Линейным уравнением в частных производных второго порядка называется соотношение между функцией  $u(x,y)$  (или  $u(x,t)$ ) и ее частными производными вида [1]:

$$L(u) = A(x, y) \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + 2B(x, y) \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} + C(x, y) \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + D(x, y) \frac{\partial u}{\partial x} + E(x, y) \frac{\partial u}{\partial y} + G(x, y)u(x, y) = F(x, y) \quad (12.1)$$

Если переменная функция  $u$  зависит от  $x$  и  $t$ , то уравнение (12.1) может быть записано следующим образом:

$$L(u) = A(x, t) \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + 2B(x, t) \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial t} + C(x, t) \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} + D(x, t) \frac{\partial u}{\partial x} + E(x, t) \frac{\partial u}{\partial t} + G(x, t)u(x, t) = F(x, t) \quad (12.2)$$

В случае если в правой части уравнения  $F=0$ , то уравнения (12.1)-(12.2) называются однородными, иначе неоднородными [2].

Если  $B^2 - 4AC < 0$ , то уравнение (12.2) относится к классу *эллиптических уравнений*, если  $B^2 - 4AC > 0$ , то (12.2) это - *гиперболическое уравнение*,  $B^2 - 4AC = 0$  если - *параболическое уравнение*. В случае, когда  $B^2 - 4AC$  не имеет постоянного знака, то это уравнение смешанного типа.

С помощью преобразования переменных  $x$ ,  $y$  (или  $x$ ,  $t$ ) уравнение можно привести к виду, когда  $B=0$ . В этом случае очень просто определяется тип уравнения. Если  $A$  и  $C$  имеют один и тот же знак, то уравнение (12.2) *эллиптическое уравнение*, если разные, то *гиперболическое*, а если  $A$  или  $C$  равно 0, то уравнение относится к *параболическим* [2].

К классическим эллиптическим уравнениям относятся [1][2]:

- уравнение Лапласа  $\Delta u = 0$ <sup>2</sup>, которое используется для описания магнитных и

<sup>1</sup> В литературе эти уравнения часто называют уравнениями математической физики

<sup>2</sup> В двумерном случае оператор Лапласа имеет вид  $\Delta u = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}$ , в трехмерном

$$\Delta u = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} /$$

стационарных тепловых полей.

- уравнение Пуассона  $\Delta u = f$ , которое применяется в электростатике, теории упругости и т. д.
- уравнение Гельмгольца  $\Delta u + cu = f$ , описывающее установившиеся колебательные процессы.

Среди гиперболических уравнений можно выделить [3]:

- волновые уравнения: одномерное волновое уравнение  $\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + f(x, t)$ , которое описывает вынужденные колебания струны; двумерное волновое уравнение  $\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = a^2 \left( \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \right) + f(x, y, t)$  описывает колебания мембраны<sup>3</sup>.
- телеграфное уравнение  $\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} + \frac{RC + LG}{LC} \frac{\partial u}{\partial t} + \frac{RG}{LC} u - \frac{1}{LC} \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = 0$  описывает изменение потенциала  $u$  в линиях электропередачи,  $L, C, R, G$  коэффициент самоиндукции, емкость, сопротивление, характеристика потерь на единицу длины линии.

К классическим параболическим уравнениям относится уравнение теплопроводности  $\frac{\partial u}{\partial t} = a^2 \Delta u + f$ .

Для нахождения единственного решения дифференциального уравнения в частных производных необходимо задать начальные и граничные условия. Начальными условиями принято называть условия, заданные в начальный момент времени  $t$ . Граничные условия задаются при различных значениях пространственных переменных. Для эллиптических уравнений задаются только граничные условия, которые можно разделить на три класса[3]:

- условие Дирихле  $u_{(x, y, z) \in \Gamma} = \varphi(x, y, z)$ , в этом случае на границе области  $\Gamma$ , в которой ищется решение, задана некая непрерывная функция  $\varphi$ . В одномерном случае это условие принимает вид  $u(0, t) = \varphi_1(t), u(L, t) = \varphi_2(t)$ ,  $(0, L)$  - интервал, на котором ищется решение одномерной задачи;
- условие Неймана  $\frac{\partial u}{\partial n}_{(x, y, z) \in \Gamma} = \varphi(x, y, z)$ , в этом случае на границе области задана производная по направлению  $n$  внешней нормали.
- смешанное условие  $\left( \alpha u + \beta \frac{\partial u}{\partial n} \right)_{(x, y, z) \in \Gamma} = \varphi(x, y, z)$ .

Для параболических уравнений, кроме граничных условий, необходимо определить одно начальное, которое может быть таким:  $u(x, t_0) = \psi(x)$ .

В случае гиперболических уравнений начальные условия могут быть следующими:

$$u(x, t_0) = \psi_1(x) \quad \text{и} \quad \frac{\partial u(x, t_0)}{\partial t} = \psi_2(x).$$

Существуют аналитические методы решения уравнений в частных производных, такие как метод Фурье (метод разделения переменных), в результате применения которых решение записывается в виде суммы бесконечного ряда довольно сложной структуры, и нахождение численного значения функции в конкретной точке представляет собой отдельную математическую задачу. Поэтому широкое распространение получили численные методы

<sup>3</sup> При  $f=0$  уравнение описывает свободные колебания струны или мембраны.

решения уравнений в частных производных.

## 12.2 Использование метода сеток для решения параболических уравнений в частных производных

Одним из наиболее распространенных численных методов решения уравнений является *метод сеток*<sup>4</sup> [1]. В методе сеток область  $\Omega$ , в которой необходимо найти решение уравнения, прямыми, параллельными осям  $t=t_j$  и  $x=x_i$ , разобьем на прямоугольные области (см. рис. 7.1), где  $x_i = x_0 + ih, h = \frac{x_n - x_0}{n}, i = 0, 1, 2, \dots, n,$

$t_j = t_0 + j\Delta, \Delta = \frac{t_k - t_0}{k}, j = 0, 1, \dots, k$ . Точки, которые лежат на границе  $\Gamma$  области  $\Omega$ , называются *внешними*, остальные точки *внутренними*. Совокупность всех точек называется сеткой,  $\Omega_h^\Delta$  величины  $h$  и  $\Delta$  шагами сетки по  $x$  и  $t$  соответственно.

Идея метода сеток состоит в том, что вместо любой непрерывной функции  $w(x, t)$  будем рассматривать дискретную функцию  $w_i^j = w(x_i, t_j)$ , которая определена в узлах сетки  $\Omega_h^\Delta$ , вместо производных функции будем рассматривать их простейшие разностные аппроксимации в узлах сетки. Таким образом, вместо системы дифференциальных уравнений в частных производных получим систему алгебраических уравнений. Чем меньше величины  $h$  и  $\Delta$ , тем точнее получаемые алгебраические уравнения моделируют исходное дифференциальное уравнение в частных производных. В этом и последующих параграфах этой главы будет рассмотрен метод сеток для каждого из трех типов уравнений и его реализация в Scilab. Знакомство с численными методами решения дифференциальных уравнений в частных производных начнем с разностных схем решения параболических уравнений.

Разностные схемы решения параболических уравнений будем рассматривать на примере следующего одномерного уравнения (12.3):

$$\begin{aligned} \frac{\partial u}{\partial t} &= a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + f(x, t), 0 \leq x \leq L, 0 \leq t \leq T \\ u(0, t) &= \mu(t), u(L, t) = \eta(t), 0 \leq t \leq T \\ u(x, 0) &= \varphi(x), 0 \leq x \leq L \end{aligned} \quad (12.3)$$

<sup>4</sup> Метод сеток в литературе также называют методом конечных разностей.

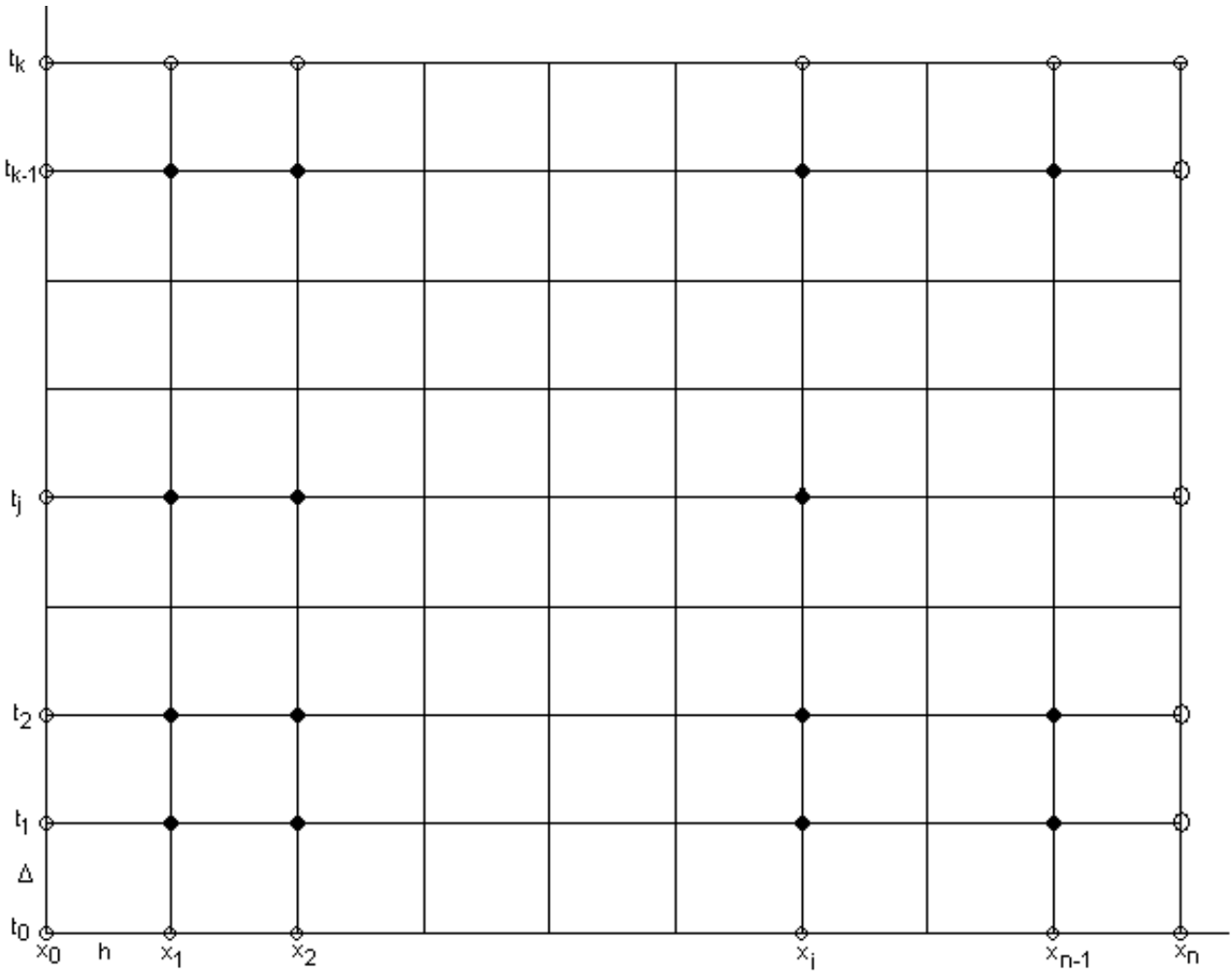


Рисунок 12.1. Сетка  $\Omega_h^\Delta$  для области  $\Omega$  с границей  $\Gamma$

Построим сетку  $\Omega_h^\Delta$  (см. рис. 12.1). Для получения сеточного уравнения заменим производную  $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$  приближенной разностной формулой[1]:

$$\frac{\partial^2 u(x_i, t_j)}{\partial x^2} = \frac{u_{i+1,j} - 2u_{i,j} + u_{i-1,j}}{h^2} . \quad (12.4)$$

В этой и последующих формулах  $u_{i,j}$  - это значение функции  $u$  в точке  $(x_i, t_j)$ ,  $u_{i+1,j}$  в точке  $(x_{i+1}, t_j)$ ,  $u_{i-1,j}$  в точке  $(x_{i-1}, t_j)$ ,  $u_{i,j+1}$  в точке  $(x_i, t_{j+1})$  и  $u_{i,j-1}$  в точке  $(x_i, t_{j-1})$ .

Для замены  $\frac{\partial u}{\partial t}$  можно воспользоваться одной из приближенных разностных формул [1]

$$\frac{\partial u(x_i, t_j)}{\partial t} = \frac{u_{i,j+1} - u_{i,j}}{\Delta} \quad (12.5)$$

$$\frac{\partial u(x_i, t_j)}{\partial t} = \frac{u_{i,j} - u_{i,j-1}}{\Delta} \quad (12.6)$$

Кроме того, заменим начальные и граничные условия их разностной аппроксимацией:

$$u_{i,0} = \varphi(x_i) = \varphi_i, \quad i = 0, 1, \dots, n \quad (12.7)$$

$$u_{0,j} = \mu(t_j) = \mu_j, \quad u_{n,j} = \nu(t_j) = \nu_j, \quad j = 0, 1, \dots, k \quad (12.8)$$

Заменяя частные производные в задаче (12.3) соотношениями (12.4) и (12.5) и учитывая условия (12.7)-(12.8), получим следующую вычислительную схему для расчета значений функции  $u$  в узлах сетки  $\Omega_h^\Delta$

$$u_{i,j+1} = \gamma u_{i,j-1} + (1 - 2\gamma) u_{i,j} + \gamma u_{i,j+1} + \Delta f_{i,j} \quad (12.9)$$

$$u_{0,j} = \mu_j, \quad u_{n,j} = \nu_j, \quad u_{i,0} = \varphi_i, \quad \gamma = \frac{a^2 \Delta}{h^2} \quad (12.10)$$

Это явная двухслойная разностная схема (см. рис. 7.2).

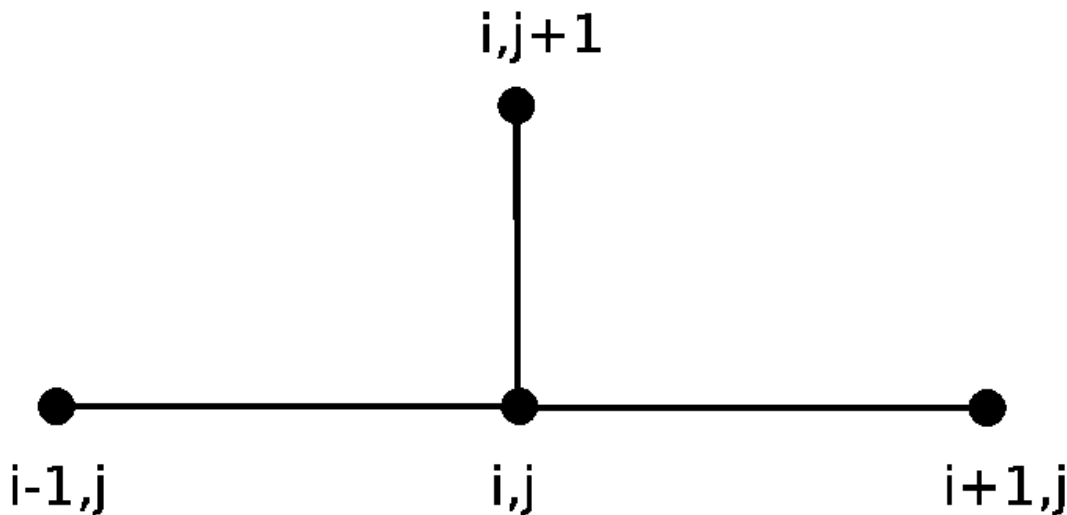


Рисунок 12.2. Шаблон явной двухслойной разностной схемы

Учитывая, что на нулевом слое (при  $i=0$ ) все значения  $u_{i,0}$ , (как впрочем, и  $u_{0,j}$ ,  $u_{n,j}$ ) известны, по формуле (12.9) можно сначала явно рассчитать значения  $u_{i,1}$ , затем  $u_{i,2}$  и так до  $u_{i,k}$ . Для устойчивости разностной схемы (12.9) значения шагов по  $t$  и  $x$  должны удовлетворять следующему условию

$$\Delta \leq \frac{h^2}{2a^2} \quad (12.11)$$

Рассмотрим решение параболического уравнения на примере следующей задачи.

#### ЗАДАЧА 12.1.

Решить параболическое уравнение, описывающее распределение температуры в стержне длиной  $L$ , начальная температура стержня задается произвольной функцией  $\varphi(x)$ . Температуры концов стержня равны  $u(0, t) = U_1 = const$ ,  $u(L, t) = U_2 = const$ .

$$\frac{\partial u}{\partial t} = a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + f(x, t), \quad a^2 = \frac{\lambda}{c\rho}, \quad 0 < x < L, \quad 0 < t < \infty,$$

$$u(0, t) = U_1 = \text{const}, \quad u(L, t) = U_2 = \text{const}, \quad 0 < t < \infty, \quad , \quad (12.12)$$

$$u(x, 0) = \varphi(x), \quad 0 < x < L$$

здесь  $a^2$  коэффициент температуропроводности,  $\lambda$  коэффициент теплопроводности материала стержня,  $c$  удельная теплоемкость,  $\rho$  плотность массы.

Подпрограмма решения задачи 12.1 с помощью явной разностной схемы (12.9) - (12.10) в Scilab представлена на листинге 12.1<sup>5</sup>.

```
//Правая часть дифференциального уравнения.
function y=f(x,t)
y=sin(x*t)
endfunction
//Начальное условие
function y=fi(x)
y=exp(0.15*x)
endfunction
//Условие на левой границе
function y=му(t)
y=1
endfunction
//Условие на правой границе
function y=ну(x)
y=2.117
endfunction
function [u,x,t]=parabol(N,K,L,T,a)
//Функция решения параболического уравнения методом сеток с
//помощью явной разностной схемы. N - количество участков,
// на которые разбивается интервал по x (0,L); K – количество
// участков, на которые разбивается интервал по t (0,T); a -
// параметр дифференциального уравнения теплопроводности,
// Функция возвращает матрицу решений u и вектора x, t
// Вычисляем шаг по x
h=L/N;
// Вычисляем шаг по t
delta=T/K;
// Формируем массив x и первый столбец матрицы решений U
// из начального условия
for i=1:N+1
x(i)=(i-1)*h;
u(i,1)=fi(x(i));
end
//Формируем массив t, первую и последнюю строку матрицы
решений
// U из граничных условий
for j=1:K+1
```

<sup>5</sup> В листинге 12.1 и во всех последующих уже учтен тот факт, что массивы в Scilab нумеруются с 0.

```

t(j)=(j-1)*delta;
u(1,j)=myu(t(j));
u(N+1,j)=nyu(t(j));
end
gam=a^2*delta/h^2;
// Формируем матрицу решений u с помощью явной разностной
схемы
// (12.9)
for j=1:K
for i=2:N
u(i,j+1)=gam*u(i-1,j)+(1-2*gam)*u(i,j)+gam*u(i+1,j)+delta*...
f(x(i),t(j));
end
end
end

```

*Листинг 12.1. Подпрограмма решения задачи 12.1 с помощью явной разностной схемы*

Входными данными подпрограммы *parabol* решения задачи 12.1 являются:  $N$  - количество интервалов, на которые разбивается отрезок  $(0, L)$ ;  $K$  - количество интервалов, на которые разбивается отрезок  $(0, T)$ ;  $L$  - длина стержня,  $T$  - интервал времени,  $a$  - параметр дифференциального уравнения. Функция возвращает три параметра: решение - сеточная функция  $u$ , определенная на сетке  $\Omega_h^\Delta$ , массивы  $x$  и  $t$ .

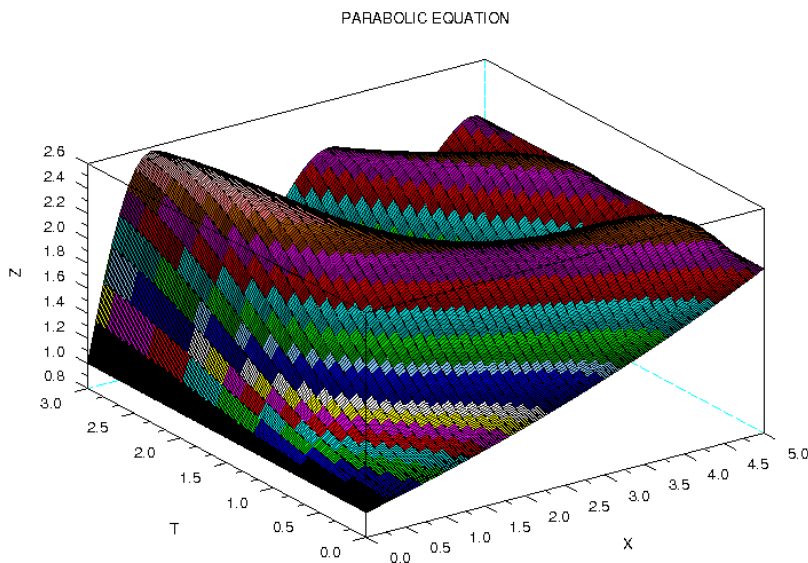
На листинге 12.2 представлено обращение к функции *parabol* для решения задачи 12.1 и построения графика решения, который изображен на рис. 12.3.

```

[U,X,T]=parabol(50,200,5,3,0.4);
surf(X,T,U');
title('PARABOLIC EQUATION');
xlabel('X');
ylabel('T');

```

*Листинг 12.2. Вызов функции parabol*



*Рисунок 12.3. График решения задачи 12.1 при  $f(x,t)=\sin(xt)$*

При решении параболических уравнений с помощью явной разностной схемы основной проблемой является устойчивость решения и правильный выбор шага по  $t$ , удовлетворяющего соотношению (12.11).

Для решения этой проблемы были предложены неявные разностные схемы[1]. Эти схемы абсолютно устойчивы, но алгоритм решения получаемого сеточного уравнения несколько сложнее, чем простой пересчет по формуле (12.9). Рассмотрим неявную разностную схему для параболического уравнения. Для построения неявной разностной схемы заменим частные производные в задаче (12.3) соотношениями (12.4), (12.6<sup>6</sup>) и с учетом условий (12.7)-(12.8) получим следующую вычислительную схему для расчета значений функции  $u$  в узлах сетки  $\Omega_h^\Delta$ .

$$\begin{aligned} \gamma u_{i-1,j} - (1+2\gamma)u_{i,j} + \gamma u_{i+1,j} &= -u_{i,j-1} - \Delta f_{i,j}, \\ i=1,2,\dots,n-1, j=1,2,\dots,k \end{aligned} \quad (12.13)$$

Соотношения (12.13) вместе с равенствами (12.10) - *неявная двухслойная* разностная схема (см. рис. 12.4). Схема (12.10), (12.13) не позволяет явно выписать решение, и для нахождения  $u_{i,j}$  при каждом значении  $j$  необходимо решить трехдиагональную систему линейных алгебраических уравнений, для чего можно воспользоваться одним из итерационных методов (например методом Зейделя [1]) или методом прогонки[1]. Преобразуем систему (12.13) к следующему виду:

$$u_{i,j} = \frac{\gamma}{1+2\gamma} (u_{i-1,j} + u_{i+1,j}) + \frac{u_{i,j-1}}{1+2\gamma} + \frac{\Delta}{1+2\gamma} f(x_i, t_j) \quad (12.14)$$

Формула (12.14) позволит запрограммировать решение системы, получаемой с помощью неявной разностной схемы, одним из численных методов, например, с помощью метода Зейделя.

Решение параболического уравнения с помощью неявной разностной схемы (с помощью функции *neuvnp*) представлено на листинге 12.3.

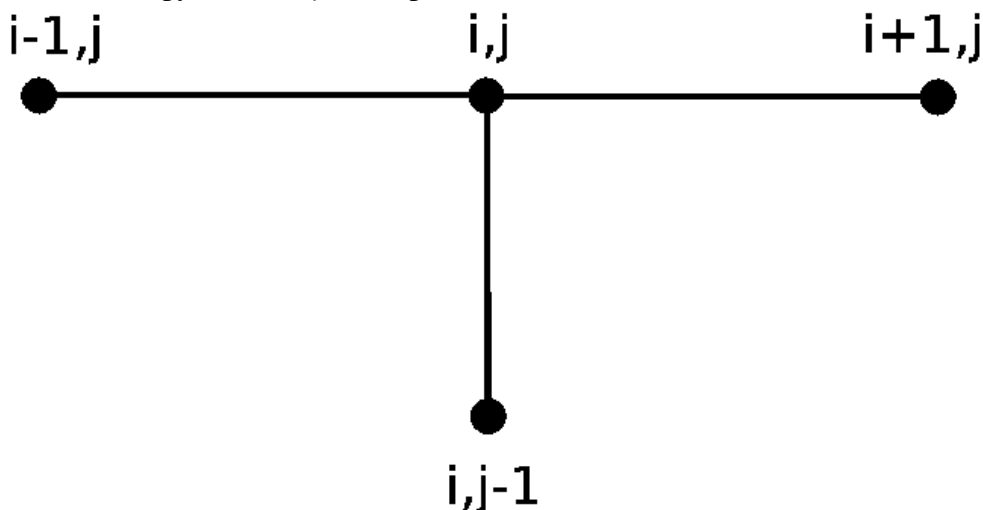


Рисунок 12.4. Шаблон неявной двухслойной разностной схемы

Входными данными функции *neuvnp* являются:  $N$  - количество участков, на которые разбивается интервал по  $x$  ( $0, L$ );  $K$  - количество участков, на которые разбивается интервал по  $t$  ( $0, T$ );  $a$  - параметр дифференциального уравнения теплопроводности;  $eps$  - точность решения СЛАУ (12.4) методом Зейделя<sup>7</sup>. Функция *neuvnp* возвращает матрицу решений  $u$

<sup>6</sup> Вместо (12.5) для явной схемы

<sup>7</sup> Выбор метод Зейделя при программировании трехдиагональной систем линейных алгебраических



задачи 12.1; массивы  $x$  и  $t$ ;  $r$  - точность решения системы (12.4) методом Зейделя; количество итераций  $k$ .

```
//Правая часть дифференциального уравнения.
function y=f(x,t)
y=sin(x*t)
//y=0;
endfunction
//Начальное условие
function y=fi(x)
y=exp(0.15*x)
endfunction
//Условие на левой границе
function y=myu(t)
y=1
endfunction
//Условие на правой границе
function y=nyu(x)
y=2.117
endfunction
function [u,x,t,r,k]=neyavn(N,K,L,T,a,eps)
// Функция решения параболического уравнения методом сеток с
// помощью неявной разностной схемы. N - количество участков,
// на которые разбивается интервал по x (0,L);
// K - количество участков, на которые разбивается интервал по
// t (0,T); a - параметр дифференциального уравнения
// теплопроводности, eps - точность решения СЛАУ (12.14)
// методом Зейделя.
// Функция neyavn возвращает:
// u - матрицу решений в узлах сетки, массив x, массив t,
// r - точность решения системы (12.14) методом Зейделя, k -
// количество итераций при решении системы (7.14) методом
// Зейделя.
// Вычисляем шаг по x
h=L/N;
// Вычисляем шаг по t
delta=T/K;
// Формируем массив x и первый столбец матрицы решений U
// из начального условия
for i=1:N+1
x(i)=(i-1)*h;
u(i,1)=fi(x(i));
end
// Формируем массив t, первую и последнюю строку матрицы
// решений U из граничных условий
for j=1:K+1
t(j)=(j-1)*delta;
u(1,j)=myu(t(j));
```

---

уравнений вида (12.13) - (12.14) - субъективный выбор авторов. Читатель может использовать и другой итерационный метод или специализированный метод решения подобных систем, типа метода прогонки.

```

u(N+1,j)=nyu(t(j));
end
// Определяем матрицу ошибок R и заполняем ее нулями
R(N+1,K+1)=0;
// Вычисляем коэффициент gamma
gam=a^2*delta/h^2;
r=1;
k=0;
// Цикл while для организации итерационного процесса при
// решении системы уравнений (12.14) методом Зейделя с
// точностью eps
while r>eps
// Вычисление матрицы ошибок R во внутренних точках
// и пересчет значений u во внутренних точках при решении
СЛАУ
// (12.14) методом Зейделя
for i=2:N
for j=2:K+1
R(i,j)=abs(u(i,j)-gam/(1+2*gam)*(u(i-1,j)+u(i+1,j))-
u(i,j-1)...
/(1+2*gam)-delta*f(x(i),t(j))/(1+2*gam));
u(i,j)=gam/(1+2*gam)*(u(i-1,j)+u(i+1,j))+u(i,j-1)...
/(1+2*gam)+delta*f(x(i),t(j))/(1+2*gam);
end
end
// Поиск максимума в матрице ошибок
r=R(1,1);
for i=1:N+1
for j=1:K+1
if R(i,j)>r
r=R(i,j);
end
end
end
// Увеличение количества итерации.
k=k+1;
end
disp(k)
endfunction
[U,X,T]=neyavn(50,200,5,3,0.4,0.1);
surf(X,T,U');
title('PARABOLIC EQUATION');
xlabel('X');
ylabel('T');

```

*Листинг 12.3. Решение задачи 12.1 с помощью неявной разностной схемы<sup>8</sup>*

Графики решений с помощью явной и неявной разностных схем практически

<sup>8</sup> Читатель может самостоятельно сравнить результаты, полученные с помощью явной и неявной разностных схем.

совпадают.

Обратите внимание, что функции, приведенные на листингах 12.1 и 12.3, позволяют решать уравнения вида (12.3) с различными функциями  $f(x, t)$ ,  $\mu(t)$ ,  $\eta(t)$ ,  $\varphi(x)$ .

Использование неявной разностной схемы в случае, когда  $f(x, t) \neq 0$ , рассмотрим на примере еще одной задачи.

### ЗАДАЧА 12.2.

Найти распределение температуры в стержне длиной  $L$ , начальная температура стержня задается произвольной функцией  $f(x)$ . Температуры концов стержня равны  $u(0, t) = U_1 = \text{const}$ ,  $u(L, t) = U_2 = \text{const}$ . На боковой поверхности стержня происходит теплообмен по закону Ньютона со средой, температура которой равна  $u_0$ .

Начально-граничная задача, описывающая распределение температуры стержня, имеет вид:

$$\begin{aligned} \frac{\partial u}{\partial t} &= a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - h(u - u_0), \quad a^2 = \frac{\lambda}{c\rho}, \quad h = \frac{\alpha p}{c\rho\sigma}, \quad 0 < x < L, \quad 0 < t < \infty, \\ u(0, t) &= U_1 = \text{const}, \quad u(L, t) = U_2 = \text{const}, \quad 0 < t < \infty, \\ u(x, 0) &= \varphi(x), \quad 0 < x < L \end{aligned} \quad (12.15)$$

здесь  $\alpha$  коэффициент теплообмена,  $\sigma$  площадь поперечного сечения стержня,  $p$  периметр поперечного сечения стержня.

Построим сетку  $\Omega_h^\Delta$   $(x_i = ih, h = \frac{L}{n}, i = 0, 1, 2, \dots, n)$ ,

$(t_j = j\Delta, \Delta = \frac{T}{k}, j = 0, 1, \dots, k)$ . Для получения сеточного уравнения заменим производную

$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$  и  $\frac{\partial u}{\partial t}$  приближенными разностными формулами (12.4), (12.6). Получится

следующая неявная разностная схема (12.16)-(12.18):

$$\begin{aligned} u_{i,0} &= \varphi(x_i), \quad i = 0, 1, \dots, N, \\ u_{0,j} &= U_1, \quad u_{N,j} = U_2, \quad j = 0, 1, \dots, K \end{aligned} \quad (12.16)$$

$$u_{i,j} = \frac{1}{1+2\gamma+\Delta h} u_{i,j-1} + \frac{\gamma}{1+2\gamma+\Delta h} (u_{i-1,j} + u_{i+1,j}) + \frac{\Delta h}{1+2\gamma+\Delta h} u_0, \quad (12.17)$$

$$i = 1, 2, \dots, N-1; \quad j = 1, 2, \dots, k;$$

$$\gamma = a^2 \frac{\Delta}{hx^2} \quad (12.18)$$

Применение неявной разностной схемы для решения задачи 12.2 представлено на листинге 12.4.

```
//Начальное условие
```

```
function y=fi(x)
```

```
y=exp(0.15*x)
```

```
endfunction
```

```
function [u,x,t,r,k]=neiav(N,K,L,T,a,h,U1,U2,u0,eps)
```

```
//Функция решения параболического уравнения методом сеток с
```

```
// помощью неявной разностной схемы.
```

```
//N - количество участков, на которые разбивается интервал по
```

x

```

// (0,L); K - количество участков, на которые разбивается
// интервал по t (0,T);
//a, h - параметры дифференциального уравнения
теплопроводности;
// eps - точность решения СЛАУ (7.17) методом Зейделя;
// U1 - температура на левом конце стержня;
// U2 - температура на правом конце стержня;
// Функция peiav возвращает:
// u - матрицу решений в узлах сетки, массив x, массив t,
// r - точность решения системы (12.17) методом Зейделя,
// k - количество итераций при решении системы методом
Зейделя.
// Вычисляем шаг по x
hx=L/N;
// Вычисляем шаг по t
delta=T/K;
// Формируем массив x и первый столбец матрицы решений U
// из начального условия
for i=1:N+1
x(i)=(i-1)*hx;
u(i,1)=fi(x(i));
end
// Формируем массив t, первую и последнюю строку матрицы
// решений U из граничных условий
for j=1:K+1
t(j)=(j-1)*delta;
u(1,j)=U1;
u(N+1,j)=U2;
end
// Определяем матрицу ошибок R и заполняем ее нулями
R(N+1,K+1)=0;
// Вычисляем коэффициент gamma
gam=a^2*delta/hx^2;
r=1;
k=0;
//Цикл while для организации итерационного процесса при
решении
//системы уравнений (12.17) методом Зейделя с точностью eps
while r>eps
// Вычисление матрицы ошибок R во внутренних точках
//и пересчет значений u во внутренних точках при решении СЛАУ
// (12.17) методом Зейделя
for j=2:K+1
for i=2:N
V=gam*(u(i-1,j)+u(i+1,j))/(1+2*gam+delta*hx)+u(i,j-1)/...
(1+2*gam+delta*hx)+delta*h*u0/(1+2*gam+delta*hx);
R(i,j)=abs(V-u(i,j));
u(i,j)=V;
end

```

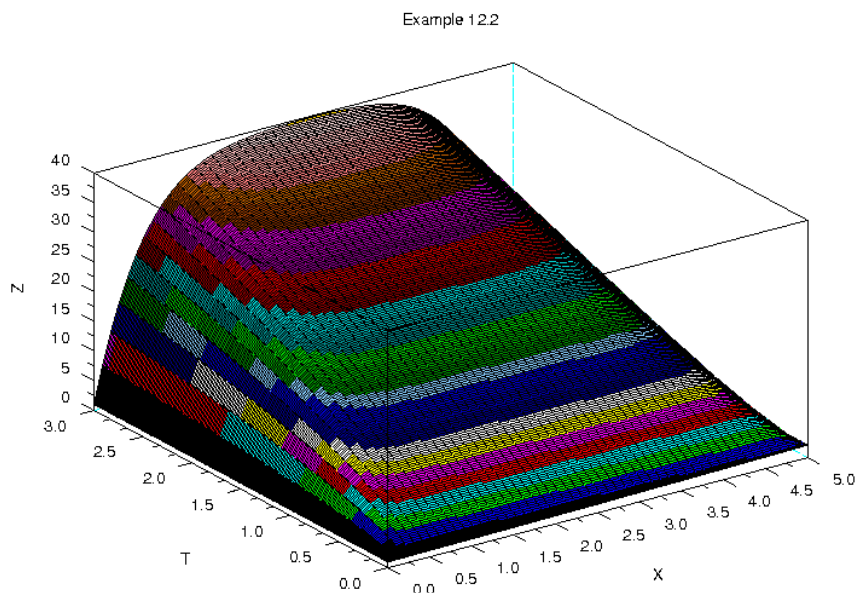
```

end
// Поиск максимума в матрице ошибок
r=R(1,1);
for i=1:N+1
for j=1:K+1
if R(i,j)>r
r=R(i,j);
end
end
end
// Увеличение количества итераций
k=k+1;
end
endfunction
//Вызов функции решения задачи 12.2.
[U,X,T,R,K]=neiav(50,200,5,3,0.4,0.5,1,2.117,30,0.001);
//Построение графика функции
surf(X,T,U');
title('Example 12.2');
xlabel('X');
ylabel('T');

```

*Листинг 12.4. Функция `neiav` решения задачи 12.2 с помощью неявной разностной схемы*

Входные и выходные данные функции `neiav` решения задачи 12.2 описаны в комментариях листинга 12.4. На рис. 12.5 представлены результаты решения задачи.



*Рисунок 12.5. График решения задачи 12.2*

Для решения получаемого алгебраического уравнения методом Зейделя потребовалось 1079 итераций. Поэтому для уменьшения количества итераций имеет смысл попробовать ускорить итерационный процесс с помощью методов релаксации или градиентных методов решения систем алгебраических уравнений Методика, изложенная в этом параграфе, может

быть использована и при решении других параболических уравнений.

### 12.3 Использование метода сеток для решения гиперболических уравнений

Решение гиперболических уравнений также можно осуществить с помощью разностных схем. Разностные схемы решения одномерного гиперболического уравнения рассмотрим на примере следующего уравнения:

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} &= a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + f(x, t), 0 < x < L, 0 \leq t \leq T \\ u(0, t) &= \mu(t), u(L, t) = \eta(t), 0 \leq t \leq T \\ u(x, 0) &= \varphi(x), \frac{\partial u(x, 0)}{\partial t} = \psi(x), 0 \leq x \leq L \end{aligned} \quad (12.19)$$

Построим сетку  $\Omega_h^\Delta$  (см. рис. 12.1), в которой будем искать решение уравнения (12.19). Частную производную  $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$  заменим разностным соотношением (12.4), а производную  $\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}$  - соотношением (12.20) [1].

$$\frac{\partial^2 u(x_i, t_j)}{\partial t^2} = \frac{u_{i,j-1} - 2u_{i,j} + u_{i,j+1}}{\Delta^2} \quad (12.20)$$

Подставляя (12.20), (12.4), (12.5) в гранично-начальную задачу (12.19), получим следующую явную разностную схему решения уравнения:

$$\begin{aligned} u_{i,j+1} &= -u_{i,j-1} + \gamma(u_{i-1,j} + u_{i+1,j}) = (2 - 2\gamma)u_{i,j} + \Delta^2 f_{i,j} \\ i &= 1, 2, \dots, N-1, j = 1, 2, \dots, K-1 \\ u_{i,0} &= \varphi(x_i), \frac{u_{i,1} - u_{i,0}}{\Delta} = \Psi_i, i = 0, 1, \dots, N \\ u_{0,j} &= \mu_j, u_{N,j} = \nu_j, j = 0, 1, \dots, K \\ \gamma &= \frac{a^2 \Delta^2}{h^2} \end{aligned} \quad (12.21)$$

которая устойчива при  $\gamma < 1$  и по аналогии с разностной схемой (12.9)-(12.10) может быть легко запрограммирована в Scilab.

В качестве примера рассмотрим следующую начально-граничную задачу.

#### ЗАДАЧА 12.3.

Решить начально-граничную задачу

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 \omega}{\partial t^2} &= a^2 \frac{\partial^2 \omega}{\partial x^2} + \sin(xt), 0 < x < L, t > 0, \\ \omega(0, t) &= \varphi(0), \omega(L, t) = \varphi(L) \\ \omega(x, 0) &= \varphi(x), \omega_t(x, 0) = \psi(x) \end{aligned} \quad (12.22)$$

На листинге 12.5 представлена функция ggg решения уравнения (12.22), а на рис. 7.9 - график полученного решения. Параметры функции ggg аналогичны рассмотренным ранее подпрограммам решения параболических уравнений.

function [u,x,t]=ggg(N,K,L,T,a)

```

//Функция решения гиперболического уравнения с помощью явной
// разностной схемы. Входные данные:
// N - количество участков, на которые разбивается интервал по
// x (0,L); K - количество участков, на которые разбивается
// интервал по t (0,T); a - параметр дифференциального
// уравнения теплопроводности. Выходные данные:
//u - матрица решений в узлах сетки, массив x, массив t,
// Вычисляем шаг по x
h=L/N;
// Вычисляем шаг по t
delta=T/K;
//Формируем массив x, первый и второй столбцы матрицы решений
u
//из начального условия
for i=1:N+1
x(i)=(i-1)*h;
u(i,1)=fi(x(i));
u(i,2)=u(i,1)+delta*psi(x(i));
end
//Формируем массив t, первую и последнюю строку матрицы
решений
// U из граничных условий
for j=1:K+1
t(j)=(j-1)*delta;
end
//Формируем первую и последнюю строку матрицы решений U
//из граничных условий
for j=2:K+1
u(1,j)=0;
u(N+1,j)=fi(L);
end
gam=a^2*delta^2/h^2;
//Формируем матрицу решений u с помощью явной разностной схемы
//(12.22)
for j=2:K
for i=2:N
u(i,j+1)=-u(i,j-1)+gam*u(i-1,j)+(2-2*gam)*...
u(i,j)+gam*u(i+1,j)+delta^2*f(x(i),t(j));
end
end
end

```

Листинг 12.5. Функция ggg решения задачи 12.3 с помощью явной разностной схемы

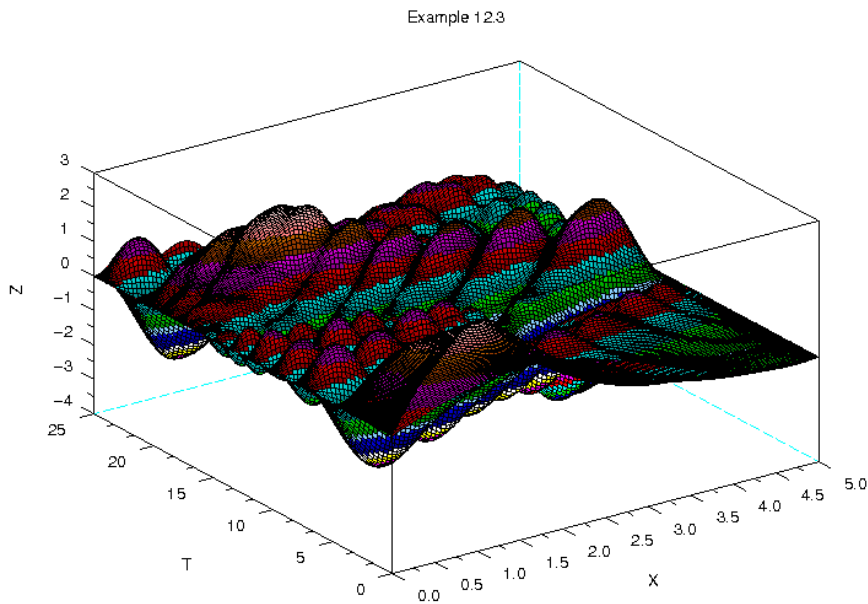


Рисунок 12.6. График решения задачи 12.3

Для решения гиперболических уравнений можно построить и неявные схемы, однако в связи с тем, что у них нет таких преимуществ перед явными, как в параболических уравнениях, их имеет смысл использовать только когда нельзя построить явную (например, при смешанных условиях на границе области).

## 12.4 Использование метода сеток для решения эллиптических уравнений

Рассмотрим разностную схему для эллиптического уравнения в прямоугольной области  $\Omega (R-b \leq x \leq R+b, -a \leq y \leq a)$  с граничными условиями Дирихле на границе  $\Gamma$ .

### ЗАДАЧА 12.4

$$\Delta u = \frac{\partial^2 \Psi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \Psi}{\partial y^2} - \frac{5}{x} \frac{\partial \Psi}{\partial x} = -2$$

$$\Psi_{(x,y) \in \Gamma} = 0$$
(12.23)

Построим сетку  $\Omega_{hx}^{hy}$ , для чего проведем в области  $\Omega$  прямые, параллельные осям  $y=y_j$  и  $x=x_i$ , где  $x_i = R-b + i \cdot hx, hx = \frac{2b}{n}, i=0,1,2,\dots,Nx$ ,

$y_j = -a + j \cdot hy, hy = \frac{2a}{k}, j=0,1,\dots,Ny$ . Для построения разностного уравнения заменим частные производные и граничные условия следующими соотношениями:

$$\frac{\partial^2 \Psi(x_i, y_j)}{\partial x^2} = \frac{\Psi_{i-1,j} - 2\Psi_{i,j} + \Psi_{i+1,j}}{hx^2}$$

$$\frac{\partial^2 \Psi(x_i, y_j)}{\partial y^2} = \frac{\Psi_{i,j-1} - 2\Psi_{i,j} + \Psi_{i,j+1}}{hy^2}$$
(12.24)



$$\begin{aligned}\Psi_{i,0}=\Psi_{i,Ny}=0, \quad i=0,1,\dots,Nx \\ \Psi_{0,j}=\Psi_{Nx,j}=0, \quad j=0,1,\dots,Ny\end{aligned}\quad (12.25)$$

С помощью соотношений (12.24)-(12.25) преобразуем эллиптическую краевую задачу к следующей системе разностных уравнений.

$$\begin{aligned}\Psi_{i,j}=\frac{1}{A}\left(B_i\Psi_{i+1,j}+C_i\Psi_{i-1,j}+D(\Psi_{i,j-1}+\Psi_{i,j+1})+2\right) \\ A=\frac{2}{hx^2}+\frac{2}{hy^2}, B_i=\frac{1}{hx^2}+\frac{5}{2hx x_i}, C_i=\frac{1}{hx^2}-\frac{5}{2hx x_i}, D=\frac{1}{hy^2} \\ i=1,2,\dots,Nx-1; j=1,2,\dots,Ny-1 \\ \Psi_{i,0}=\Psi_{i,Ny}=0, i=0,1,\dots,Nx \\ \Psi_{0,j}=\Psi_{Nx,j}=0, i=0,1,\dots,Ny\end{aligned}\quad (12.26)$$

Эту систему можно решать итерационными методами (например методом Зейделя). В случае медленной сходимости итерационных процессов при решении сеточных уравнений, получаемых при аппроксимации гиперболических и эллиптических задач, имеет смысл попробовать заменить метод Зейделя градиентными методами (или методами релаксации). На листинге 12.6 представлено решение уравнения 12.23 сеточным методом, а на рис. 7.10 - график найденного решения.

```
function [psi,x,y,k]=ellip(R,a,b,Nx,Ny,eps)
// Функция ellip решения задачи 12.4.
// Входные данные:
// R, a, b - значения, определяющие область решения задачи,
//Nx - количество участков, на которые разбивается интервал по
// x(R-b,R+b);
// Ny - количество участков, на которые разбивается интервал
по
// y (-a,a);
// eps - точность решения уравнения (12.26) метоом Зейделя.
// Выходные данные:
// psi - матрица решений в узлах сетки, массив x, массив y,
//k - количество итерация при решении разностного уравнения
// (12.26) методом Зейделя.
// Вычисляем шаг по y
hy=2*a/Ny;
// Вычисляем шаг по x
hx=2*b/Nx;
// Формируем массив x, первый и последний столбцы матрицы
// решений psi из граничного условия
for i=1:Nx+1
x(i)=R-b+(i-1)*hx;
psi(i,1)=0;
psi(i,Ny+1)=0;
end;
// Формируем массив y, первую и последнюю строки матрицы
// решений psi из граничного условия
for j=1:Ny+1
y(j)=-a+(j-1)*hy;
psi(1,j)=0;
```

```

psi(Nx+1,1)=0;
end;
// Вычисляем коэффициенты разностного уравнения (12.26)
A=2/hy^2+2/hx^2;
D=1/hy^2;
for i=2:Nx+1
B(i)=1/hx^2+5/(2*hx*x(i));
C(i)=1/hx^2-5/(2*hx*x(i));
end
//Решение разностного уравнения (12.26) методом Зейделя с
// точностью eps
p=1;
k=0;
while p>eps
for i=2:Nx
for j=2:Ny
V=1/A*(B(i)*psi(i-1,j)+C(i)*psi(i+1,j)+D*(psi(i,j-1)...
+psi(i,j+1))+2);
R(i,j)=abs(V-psi(i,j));
psi(i,j)=V;
end
end
p=R(2,2);
for i=2:Nx
for j=2:Ny
if R(i,j)>p
p=R(i,j);
end
end
end
k=k+1;
end
endfunction
//Вызов функции решения задачи 12.4.
[PSI,X,Y,K]=ellip(18,3,6,32,16,0.01);
//Построение графика функции
surf(X,Y,PSI');
title('Example 12.4');
xlabel('X');
ylabel('Y');

```

*Листинг 12.6. Решение задачи 12.4*

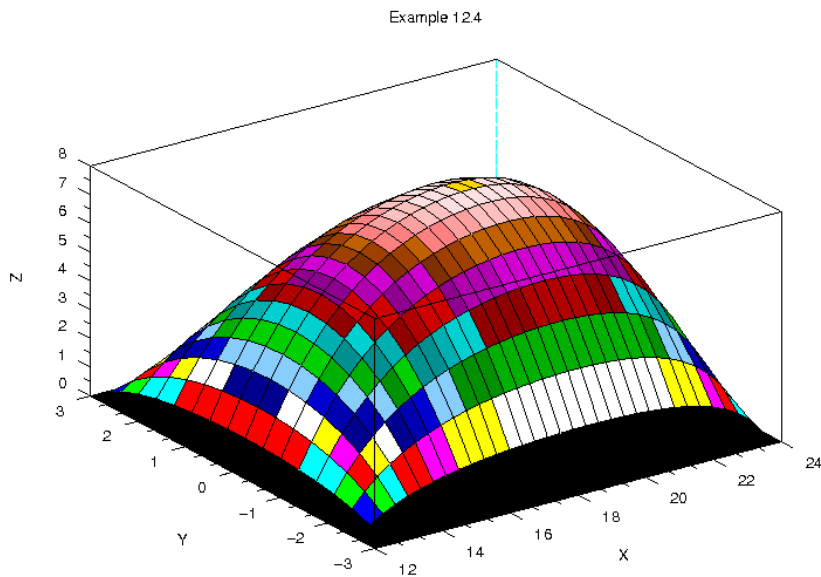


Рисунок 12.7. График решения уравнения 12.23 сеточным методом

Авторы надеются, что читатель, разобравшийся с решением уравнения 12.23, без проблем построит разностную схему и для других эллиптических уравнений.

Метод сеток позволяет решить широкий класс уравнений в частных производных. Однако при сложной геометрии области, уравнениях с переменными коэффициентами, сложными условиями на границе области использование этого метода не целесообразно, в этих случаях можно использовать метод конечных элементов, который реализован в кроссплатформенном свободно распространяемом пакете *freefem* [4].